

1. Модель

Познание мира:

человек отображает объекты, явления окружающего мира в своих представлениях

Модель – это отображение явления, сохраняющее его особенности.

Моделью может быть:

- 1) экспериментальная установка;
- 2) текстовое описание явления;
- 3) чертеж;
- 4) схема;
- 5) набор математических равенств.

Существуют разные модели.

Различают:

- 1) физическую модель;
- 2) графическую модель;
- 3) математическую модель и т.д.

Математическая модель – приближенное описание явления с помощью математических символов.

Условия, что данное отображение представляет модель:

1. Отображение объективной реальной ситуации.
2. Наличие правил по соответствию между оригиналом и моделью. (Соответствие должно быть взаимно однозначное).
3. Наглядность и простота.

ПРИМЕР. Модель ускорения тела массой m под действием силы F :

$$m\ddot{x} = F$$

$$x(0) = 0$$

$$\dot{x}(0) = 0$$

Математические модели необходимы для:

- 1) изучения моделируемого явления;
- 2) совершенствования моделируемой системы;
- 3) прогнозирования поведения моделируемого объекта

Для космической техники эксплуатации оборудования дорогая. Поэтому все разработки требуют их оптимизации (уменьшения затрат). Для этого используют модели процессов используемых объектов и самих объектов.

Примеры использования моделирования:

- 1) Проектировании движительной установки. Характеристики электро-реактивного двигателя в начале просчитывают средствами моделирования, а потом уже рассматривают вопрос изготовления двигателя.

2) Проектирование энергетической установки ЛА (летательного аппарата). Для определенной задачи энергетическую установку рассчитывают оптимальной (большая мощность, малый вес), через оптимизацию ее математической модели.

3) для определения ресурса ЛА используют ускоренные испытания, которые основываются на математическом моделировании ресурсного эксперимента (ускоренные испытания).

4) последствия ядерной войны удалось определить только на математической модели этого явления

Классификация моделей

Различают:

1. *Модель черного ящика.*

Физика процесса неизвестна.

Существуют экспериментальные данные о явлении.

Математическая модель представлена регрессионными зависимостями (многочленами).

Для построения можно использовать метод наименьших квадратов.

Модели точны в области охватываемой экспериментом, но требуют обоснования точности.

Нужно:

- Чтобы эксперимент повторялся;
- Выделить зависимые и независимые параметры.

Рассматриваемая модель строится через планирование эксперимента.

2. *Интегральные модели.*

Модели, описанные через интегральную запись законов сохранения.

Это законы сохранения массы, количества движения, энергии.

Необходимо знание физических процессов на уровне объемных потоков масс, энергии и т.д.

Характеристики таких моделей представляют собой интегральные (суммарные, средние) величины.

Решения таких моделей связаны с матричными представлениями, решением систем уравнений, решениями алгебраических и трансцендентных уравнений, численным интегрированием.

Результаты решений требуют для их совпадения с экспериментальными данными использования приемов идентификации.

Приемы идентификации позволяют повысить точность результатов моделирования даже при неправильном описании объекта исследования.

Данные для идентификации строятся через планирование эксперимента

3. Дифференциальные модели.

Модели описывают объект или процесс дифференциальными уравнениями для локальных элементов.

Модели наиболее точно отображают физику процесса.

Самые неточные модели для результатов эксперимента.

Выводы

Модель – это отображение явления, сохраняющее его особенности.

Математическая модель – приближенное описание явления с помощью математических символов.

Условия, что данное отображение представляет модель:

1. Отображение объективной реальной ситуации.
2. Наличие правил по соответствию между оригиналом и моделью. (Соответствие должно быть взаимно однозначное).
3. Наглядность и простота.

Математические модели необходимы для:

- 1) изучения моделируемого явления;
- 2) совершенствования моделируемой системы;
- 3) прогнозирования поведения моделируемого объекта

Различают:

1. Модель черного ящика.

Физика процесса неизвестна.

Математическая модель представлена регрессионными зависимостями (многочленами).

2. Интегральные модели.

Модели, описанные через интегральную запись законов сохранения. Результаты решений требуют использования приемов идентификации.

3. Дифференциальные модели.

Модели описывают объект или процесс дифференциальными уравнениями для локальных элементов.

Вопросы

- 1) Что такое модель?
- 2) Что такое математическая модель?
- 3) Перечислите условия, которые данное отображение позволяют представить моделью.
- 4) Для чего необходимы математические модели?
- 5) Какие различают модели относительно их описания?
- 6) Что такое модель “черного ящика”?
- 7) Что такое интегральная модель?
- 8) Что такое дифференциальная модель?

Основные представления

Объект исследования и эксперимент

Объект исследования – объект, который является носителем информации, которую нужно изучить для решения поставленной задачи.

Эксперимент – система операций, воздействий, наблюдений, направленных на получение информации об объекте при его исследовании.

Объект исследования должен обладать двумя свойствами:

- 1) результаты эксперимента воспроизводимы;
- 2) управляемый.

Эксперимент называется **воспроизводимым**, если разброс результатов опыта контролируется и не превышает заранее заданного значения.

Математическая **теория воспроизводимых экспериментов** научно обосновывает методы, позволяющие при минимальных затратах времени и средств, планировать эксперимент так, чтобы получить максимум требуемой информации об объекте с требуемой точностью.

Параметры объекта

Объект исследования может быть представлен в виде схемы (рис.1)

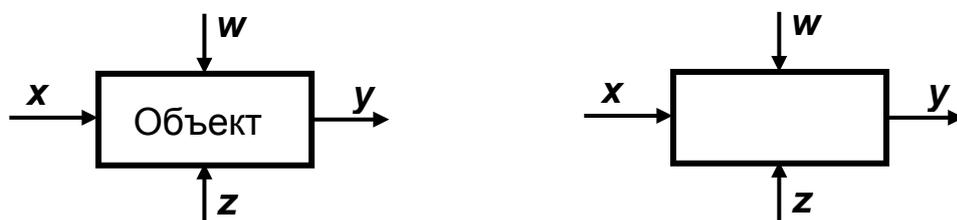


Рис. 1

Все параметры, определяющие состояние объекта, делятся на четыре группы. Это три группы параметров действующих на объект:

1. **Входные переменные** $x=(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Это управляемые и контролируемые параметры объекта. Значения входных переменных заключены в определенном интервале.

2. Контролируемые, но неуправляемые параметры $z=(z_1, z_2, \dots z_n)$. В эту группу входят те параметры, изменение которых невозможно.

3. Неконтролируемые и неуправляемые параметры $w=(w_1, w_2, \dots w_n)$. Это параметры характеристики и действия которых не поддаются определению.

Контролируемые переменные x, z называются **факторами**.

Четвертая группа – это **выходные величины** $y=(y_1, y_2, \dots y_n)$. Они характеризуют поведение и свойства объекта при его эксплуатации. В качестве выходной величины может быть выбран некоторый обобщенный технико-экономический показатель. В этом случае выходная величина – скаляр (число).

Выходная величина называется **откликом**.

Задача эксперимента – отыскание зависимости между группами контролируемых параметров объекта. Наиболее распространенной является функция вида:

$$Y=F(x, z),$$

устанавливающая связь между входными и выходными параметрами.

Задачи, решаемые экспериментом

Задачи, решаемые экспериментом, определяются выходными и входными величинами. Можно выделить следующие направления при планировании эксперимента.

- 1) Выходные величины не случайные величины - задача заключается в измерении этих величин и установлении их погрешности;
- 2) Выходные величины случайные величины - задача заключается в оценке случайной величины;
- 3) Выходные величины случайные величины а входные величины не случайные величины – задача заключается в исследовании функций неслучайных величин;
- 4) Задача определения степени влияния входных величин на выходные. Все эти направления определяются математической статистикой. Первое направление связано с теорией ошибок. Второе направление связано с характеристиками функций распределений. Третье направление содержит численными методами. Четвертое направление включает в себя и теорию ошибок, и функцию распределения, и численные методы.

Большинство задач связаны как с методами обработки, так и методами планирования. Лишь некоторые задачи содержат только методы обработки, так как планирование для них или не имеет смысла или довольно трудно определимое с точки зрения математики.

То есть приведенные задачи и определяют выбор необходимых планов эксперимента.

Виды экспериментов

В зависимости от способа сбора экспериментального материала, необходимого для математического описания объекта, различают пассивный и активный эксперименты.

Пассивный эксперимент – такой эксперимент, когда регистрация контролируемых переменных в режиме работы объекта выполняется без внесения преднамеренных возмущений.

Активный эксперимент – такой эксперимент, когда регистрация контролируемых переменных в режиме работы объекта выполняется при искусственных возмущениях, выбранных, по заранее спланированной программе.

Объект называется **управляемым**, если на нем возможен активный эксперимент.

Планировать можно только активный эксперимент.

В зависимости от числа факторов эксперименты делятся на однофакторные и многофакторные.

Однофакторный эксперимент – такой эксперимент, когда изменяется только одна входная переменная и регистрируется отклик.

Если отклик зависит от нескольких факторов, то однофакторный эксперимент, проводимый при постоянстве значений всех факторов, кроме одного, позволяет определить зависимость отклика от одного фактора. Такой эксперимент позволяет получить многопараметрическое семейство кривых. Такой эксперимент является трудоемким и требует высокой классификации исследователя.

Многофакторный эксперимент – такой эксперимент, когда изменяется два и больше факторов и регистрируется отклик. При этом каждый фактор принимает несколько фиксированных значений (уровней). Если каждый фактор принимает только два значения, эксперимент называют **двухуровневым**. Различают двухуровневый, **многоуровневый** эксперимент.

Каждый эксперимент связан с измерением различных величин.

Метрологическое обеспечение

Метрологическое обеспечение эксперимента – это выбор:

- состава измерительных средств;
- количества измерений;
- последовательности измерений

Метрологическое обеспечение эксперимента должно быть построено так, чтобы обеспечить воспроизводимость результатов. Вос-

производимые результаты при этом обладают определенным разбросом или рассеиванием. Следовательно, результаты эксперимента представляют собой выборку из некоторого распределения.

С точки зрения математической статистики задача эксперимента – это организация представительной выборки из некоторого распределения.

Результатом обработки полученных данных эксперимента является модель объекта, которая соответствует области изменения факторов.

Следовательно, планирование эксперимента включает в себя:

- выбор факторов;
- выбор отклика;
- выбор уровней значений факторов;
- метрологическое обеспечение;
- обработку значений отклика.

Выводы

Объект исследования – носитель информации, которую нужно изучить для решения поставленной задачи.

Эксперимент – система операций, воздействий, наблюдений, направленных на получение информации об объекте.

Эксперимент называется **воспроизводимым**, если результаты опыта контролируются и не превышает заданного значения.

Математическая **теория воспроизводимых экспериментов** обосновывает методы, позволяющие при минимальных затратах, планировать эксперимент так, чтобы получить максимум информации об объекте с требуемой точностью.

Параметры, определяющие состояние объекта:

1. **Входные переменные** $x=(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Это управляемые и контролируемые параметры объекта.

2. **Контролируемые, но неуправляемые** параметры $z=(z_1, z_2, \dots, z_n)$.

3. **Неконтролируемые и неуправляемые** параметры $w=(w_1, w_2, \dots, w_n)$.

4. **Выходные величины** $y=(y_1, y_2, \dots, y_n)$. Характеризуют поведение и свойства объекта при его эксплуатации.

Контролируемые переменные x, z называются **факторами**.

Выходная величина называется **откликом**.

Задача эксперимента – отыскание функции вида:

$$Y=F(x, z),$$

устанавливающая связь между входными и выходными параметрами.

Направления при планировании эксперимента.

- 1) Выходные величины не случайные величины - задача заключается в измерении этих величин и установлении их погрешности;
- 2) Выходные величины случайные величины - задача заключается в оценке случайной величины;
- 3) Выходные величины случайные величины а входные величины не случайные величины – задача заключается в исследовании функций неслучайных величин;
- 4) Задача определения степени влияния входных величин на выходные.

Задачи связаны как с методами обработки, так и методами планирования и определяют выбор планов эксперимента.

Пассивный эксперимент – когда регистрация контролируемых переменных выполняется без внесения возмущений.

Активный эксперимент – когда регистрация контролируемых переменных выполняется при искусственных возмущениях, выбранных, по спланированной программе.

Объект называется **управляемым**, если на нем возможен активный эксперимент.

Планировать можно только активный эксперимент.

В зависимости от числа факторов эксперименты делятся на однофакторные и многофакторные.

Однофакторный эксперимент – когда изменяется только одна входная переменная.

Многофакторный эксперимент – когда изменяется два и больше факторов и регистрируется отклик. Если каждый фактор принимает только два значения, эксперимент называют **двухуровневым**. Различают **многоуровневый** эксперимент.

Метрологическое обеспечение эксперимента – это выбор:

- состава измерительных средств;
- количества измерений;
- последовательности измерений

С точки зрения математической статистики задача эксперимента – это организация представительной выборки из некоторого распределения.

Результатом обработки полученных данных эксперимента является модель объекта, которая соответствует области изменения факторов.

Следовательно, планирование эксперимента включает в себя:

- выбор факторов;
- выбор отклика;
- выбор уровней значений факторов;
- метрологическое обеспечение;
- обработку значений отклика.

Вопросы

1. Что такое объект исследования
2. Что такое эксперимент
3. Перечислите основные свойства объекта исследования
4. Какой эксперимент называют воспроизводимым
5. В виде какой схемы может быть представлен объект исследования
6. Перечислите параметры, характеризующие объект исследования
7. Что такое входные параметры
8. Что такое контролируемые, но неуправляемые параметры
9. Что такое неконтролируемые и неуправляемые параметры
10. Что такое выходные величины
11. Как называются контролируемые переменные
12. Как называются выходные величины
13. Перечислите количество основных задач решаемых экспериментом
14. С какими методами связано большинство задач
15. Что такое пассивный эксперимент
16. Что такое активный эксперимент
17. Какой объект называется управляемым
18. Что такое однофакторный эксперимент
19. Что такое многофакторный эксперимент
20. Какой эксперимент называют двухуровневым и многоуровневым
21. Что такое метрологическое обеспечение
22. Что представляет собой эксперимент с точки зрения математической статистики
23. Что включает в себя планирование эксперимента

Планирование эксперимента

Тема 3

2.1. Вычисление погрешностей

2.2. Классификация погрешностей

Точный результат решения задачи:

$$R = R(I)$$

R – точный результат;

I – точное значение исходных данных.

Описание задачи

Результаты принятого математического описания

$$\tilde{R} = \tilde{R}(\tilde{I})$$

\tilde{R} - результаты принятого математического описания

\tilde{I} - принятые значения исходных данных

Выбор метода решения задачи

Результаты решение задачи выбранным методом

$$\tilde{R}_p = \tilde{R}_p(\tilde{I}_p)$$

\tilde{R}_p - результаты решение задачи связанные с выбором метода решения

\tilde{I}_p - выбранные исходные данные для метода решения

Вычисление результатов

Результат счета

$$\tilde{R}_p^* = \tilde{R}_p^*(\tilde{I}_p^*)$$

\tilde{R}_p^* - результаты счета при округлении чисел

\tilde{I}_p^* - округленные значения исходных данных

Погрешности – характеристики различия полученных результатов

1. $\Delta_1 = \rho(R, \tilde{R})$ - *неустраняемая погрешность*. Характеризует неточность построения модели и неточность задания исходных данных.
2. $\Delta_2 = \rho(R, \tilde{R}_p)$ - *погрешность метода*. Характеризует применение приближенного метода решения задачи.
3. $\Delta_3 = \rho(\tilde{R}, \tilde{R}_p^*)$ - *вычислительная погрешность*. Характеризует вычислениях при округления чисел.

Различают погрешности решения задачи

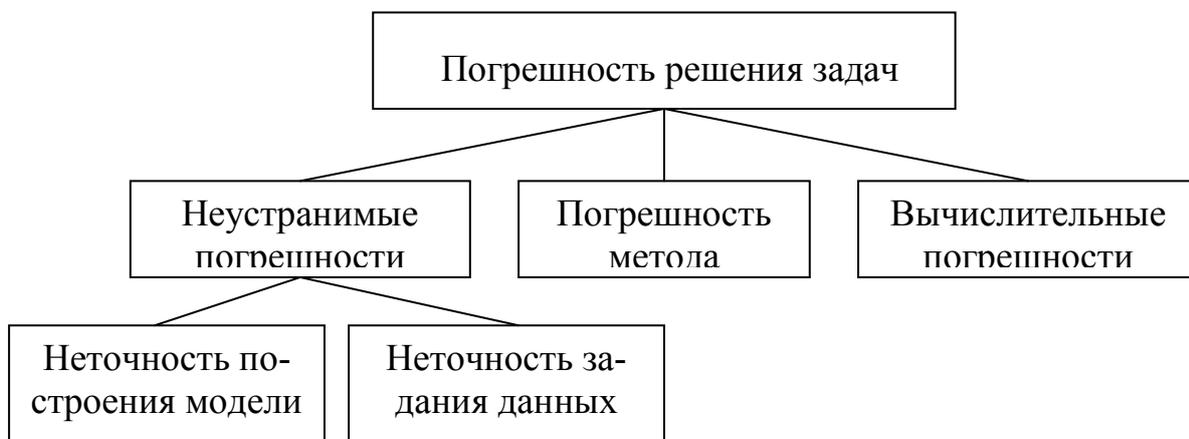


Рис. 2

2.3. Абсолютная и относительная погрешности

Пусть

x – точное значение величины;

x^* – приближенное значение величины.

Опр. Абсолютная погрешность – это величина, которая не меньше модуля разности между точным и приближённым значениями величин.

$$\Delta(x^*) \geq |x - x^*|$$

Опр. Относительная погрешность – это величина, которая не меньше абсолютной погрешности приходящейся на единицу значения этой величины.

$$\delta(x^*) \geq \frac{|x - x^*|}{x^*}$$

ПРИМЕР: Точное значение числа 4.5, приближённое 5.

Абсолютная погрешность $\Delta(x^*) \geq |5 - 4.5| = 0.5$

Относительная погрешность $\delta(x^*) \geq \frac{|5 - 4.5|}{5} = 0.1$

Число x записывают следующим образом:

$$x = x^* \pm \Delta(x^*)$$

или

$$x = x^* (1 \pm \delta(x^*))$$

Связь между абсолютной и относительной погрешностями

$$\delta(x^*) = \frac{\Delta(x^*)}{x^*}$$

Для приведенного примера:

$$x = 5 \pm 0.5$$

$$x = 5(1 \pm 0.1)$$

2.4. Приближённые вычисления. Значащие и верные цифры

Опр. Значащими цифрами числа называют все цифры в его записи, начиная с первой не нулевой слева.

ПРИМЕР:

$$a^* = 3200 \quad 4 \text{ значащих цифры};$$

$$a^* = 0.025 \quad 2 \text{ значащих цифры};$$

$$a^* = 0.0110 \quad 3 \text{ значащих цифры};$$

$$a^* = 0.0101 \quad 3 \text{ значащих цифры}.$$

Опр. Значащую цифру называют верной, если абсолютная погрешность числа не превосходит половину единицы разряда соответствующего этой цифре.

Замечания.

1. Цифры, стоящие перед верной цифрой, также являются верными.
2. Цифры, стоящие после последней верной цифры, называется сомнительным.

ПРИМЕР:

$$a^* = 324$$

$$\Delta(a^*) = 0.4 \quad 3 \text{ верных цифры};$$

$$\Delta(a^*) = 4 \quad 2 \text{ верных, 1 сомнительная};$$

$$\Delta(a^*) = 40 \quad 1 \text{ верная, 2 сомнительных}.$$

$$a^* = 0.32700$$

$$\Delta(a^*) = 0.0003 \quad 3 \text{ верных};$$

$$\Delta(a^*) = 0.00007 \quad 3 \text{ верных}.$$

Замечания.

1. Абсолютную и относительную погрешности обычно записывают в виде числа, содержащего одну или две значащих цифры.
2. Понятие верной значащей цифры позволяет записывать приближённое число без абсолютной погрешности.

Если число записано без абсолютной погрешности, то считают, что число записано со всеми верными значащими цифрами, и его абсолютная погрешность равняется половине единице разряда последней цифры числа.

ПРИМЕР: Число записано со всеми верными значащими цифрами.

$$a^* = 324, \text{ тогда } \Delta(a^*) \leq 0.5;$$

$$a^* = 0.3270, \text{ тогда } \Delta(a^*) = 0.00005.$$

2.5. Правила округления цифр

При выполнении приближенных вычислений число значащих цифр в промежуточных результатах не должно превышать число верных цифр более чем на одну или две единицы.

Окончательный результат записывается только с верными значащими цифрами.

При округлении сохраняются только верные цифры, лишние отбрасываются, причем;

1. Если первая из отбрасываемых цифр больше 5 или равна 5 и после нее есть отличные от нуля цифры, то оставшаяся последняя цифра увеличивается на единицу.

$$\begin{array}{lll} a^* = 326 & \Delta(a^*) = 4 & a^* \approx 33 \cdot 10 \\ a^* = 0.0277 & \Delta(a^*) = 0.0004 & a^* \approx 0.028 \\ a^* = 0.0252 & \Delta(a^*) = 0.005 & a^* \approx 0.03 \\ a^* = 252 & \Delta(a^*) = 40 & a^* \approx 3 \cdot 10^2 \end{array}$$

2. Если первая из отбрасываемых цифр меньше 5 или равна 5 и после все остальные равны нулю, то последняя из оставшихся цифр остается без изменения.

$$\begin{array}{lll} a^* = 324 & \Delta(a^*) = 4 & a^* \approx 33 \cdot 10 \\ a^* = 0.0274 & \Delta(a^*) = 0.0004 & a^* \approx 0.027 \\ a^* = 0.025 & \Delta(a^*) = 0.005 & a^* \approx 0.02 \\ a^* = 3.5 \cdot 10^2 & \Delta(a^*) = 50 & a^* \approx 3 \cdot 10^2 \end{array}$$

Выводы

Погрешности характеризуют различия полученных результатов
Различают погрешности задач

1. $\Delta_1 = \rho(R, \tilde{R})$ - *неустраняемая погрешность*. Характеризует неточность построения модели и неточность задания исходных данных.
2. $\Delta_2 = \rho(R, \tilde{R}_p)$ - *погрешность метода*. Характеризует применение приближенного метода решения задачи.
3. $\Delta_3 = \rho(\tilde{R}, \tilde{R}_p^*)$ - *вычислительная погрешность*. Характеризует вычисления при округлении чисел.

Неустраняемые погрешности определяются неточностью построения модели и неточностью задания данных.

Абсолютная погрешность – это величина, которая не меньше модуля разности между точным и приближённым значениями величин.

$$\Delta(x^*) \geq |x - x^*|$$

Относительная погрешность – это величина, которая не меньше абсолютной погрешности приходящейся на единицу значения этой величины.

$$\delta(x^*) \geq \frac{|x - x^*|}{x^*}$$

Связь между абсолютной и относительной погрешностями

$$\delta(x^*) = \frac{\Delta(x^*)}{x^*}$$

Значащими цифрами числа называют все цифры в его записи, начиная с первой не нулевой слева.

Значащую цифру называют верной, если абсолютная погрешность числа не превосходит половину единицы разряда этой цифры

Цифры, стоящие перед верной цифрой, также являются верными.

Цифры, стоящие после последней верной цифры, называется сомнительным.

Абсолютную и относительную погрешности обычно записывают в виде числа, содержащего одну или две значащих цифры.

Если число записано без абсолютной погрешности, то считают, что число записано со всеми верными значащими цифрами, и его абсолютная погрешность равняется половине единице разряда последней цифры числа.

При выполнении приближенных вычислений число значащих цифр в промежуточных результатах не должно превышать число верных цифр более чем на одну или две единицы.

Окончательный результат записывается только с верными значащими цифрами.

При округлении сохраняются только верные цифры, лишние отбрасываются, причем;

Если первая из отбрасываемых цифр больше 5 или равна 5 и после нее есть отличные от нуля цифры, то оставшаяся последняя цифра увеличивается на единицу.

Если первая из отбрасываемых цифр меньше 5 или равна 5 и после все остальные равны нулю, то последняя из оставшихся цифр остается без изменения.

Вопросы

- 1.Что такое погрешность?
- 2.Какие различают погрешности решения задачи?
- 3.Чем определяются неустранимые погрешности?
- 4.Что характеризует погрешность метода?
- 5.Что характеризует неустранимая погрешность?
- 6.Что характеризует вычислительная погрешность?
- 7.Что такое абсолютная погрешность?
- 8.Что такое относительная погрешность?
- 9.Как связаны между собой абсолютная и относительная погрешности?
- 10.Какие цифры называются значащими?
- 11.Какую значащую цифру называют верной?
- 12.Какими считаются цифры стоящие перед верной цифрой?
- 13.Какими считаются цифры стоящие после последней верной цифрой?

14. Как записывают абсолютную и относительную погрешность?
 15. Чему равна абсолютная погрешность числа, если оно записано без абсолютной погрешности?
 16. Сколько должно быть значащих цифр в числах промежуточного счета?
 17. Как записывают окончательный результат?
 18. Как происходит округление числа?

Планирование эксперимента
 Тема 4

Определение погрешности функции

Задана функция многих переменных:

$$y = y(x_1, x_2, \dots, x_n), \text{ где } \{x_i\} \in G$$

Опр. Если y^* приближенное значение y , то предельной абсолютной погрешностью $\Delta(y^*)$ называют наилучшую при имеющейся информации оценку погрешности величины y^*

$$\Delta(y^*) = \sup |y(x_1, x_2, \dots, x_n) - y^*|, \text{ где } \{x_i\} \in G$$

Предельной относительной погрешностью называется величина

$$\delta(y^*) = \frac{\Delta(y^*)}{y^*}$$

Формула Лагранжа. Если функция $y = f(x)$ в замкнутом интервале $[a, b]$ непрерывна и имеет непрерывную производную в этом интервале, то существует такое число c между a и b , что

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c), \quad a \leq c \leq b$$

Для функции нескольких переменных это можно записать, как

$$y(x_1, x_2, \dots, x_n) - y^* = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f(c_j)}{\partial x_j} (x_j - x_j^*), \quad x_j \leq c_j \leq x_j^*$$

Откуда следует оценка погрешностей

$$y(x_1, x_2, \dots, x_n) - y^* \leq \sum_{j=1}^n \sup \left| \frac{\partial f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_j} \right| |\Delta(x_j^*)|$$

или можно перейти к линейной погрешности

$$\Delta(y^*) \leq \sum_{j=1}^n \left| \frac{\partial f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_j} \right| |\Delta(x_j^*)|$$

Относительная погрешность:

$$\delta(y^*) = \frac{\Delta(y^*)}{y^*} \leq \sum_{j=1}^n \left| \frac{\frac{\partial f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_j}}{y^*} \right| |\Delta(x_j^*)| =$$

$$= \sum_{j=1}^n \left| \frac{\partial}{\partial x_j} \ln f(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) \right| |\Delta(x_j^*)|$$

Следствие. Для функции одной переменной $y = f(x)$ абсолютная погрешность имеет вид:

$$\Delta(y^*) = \left| \frac{\partial f}{\partial x} \Delta(x^*) \right|,$$

относительная погрешность:

$$\delta(y^*) = \left| \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\Delta(x^*)}{f(x)} \right|.$$

Рекомендации определения погрешности для простых случаев:

1. Погрешность алгебраической суммы нескольких приближённых чисел.

$$y = x_1 \pm x_2 \pm x_3$$

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} = 1; \quad \frac{\partial y}{\partial x_2} = \pm 1; \quad \frac{\partial y}{\partial x_3} = \pm 1;$$

$$\Delta(y^*) = \sum_{i=1}^3 \left| \frac{\partial y}{\partial x_i} \right| |\Delta(x_i^*)| = \sum_{i=1}^3 |\Delta(x_i^*)|;$$

$$\delta(y^*) = \frac{\Delta(y^*)}{y^*} = \frac{\sum_{i=1}^3 |\Delta(x_i^*)|}{\sum_{i=1}^3 |x_i^*|};$$

2. Погрешности произведения нескольких приближённых чисел.

$$y = x_1 * x_2 * x_3;$$

$$\ln y = \ln x_1 + \ln x_2 + \ln x_3;$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \ln y = \frac{1}{x_1}; \quad \frac{\partial}{\partial x_2} \ln y = \frac{1}{x_2}; \quad \frac{\partial}{\partial x_3} \ln y = \frac{1}{x_3};$$

$$\delta(y^*) = \sum_{i=1}^3 \left| \frac{\partial}{\partial x_i} \ln y \right| |\Delta(x_i^*)| = \sum_{i=1}^3 \left| \frac{1}{x_i} \right| |\Delta(x_i^*)| = \sum_{i=1}^3 \delta(x_i^*);$$

$$\Delta(y^*) = y^* \delta(y^*) = x_1 * x_2 * x_3 * \sum_{i=1}^3 \delta(x_i^*).$$

3. Погрешность частного от деления приближённых чисел.

$$y = \frac{x_1}{x_2};$$

$$\ln y = \ln x_1 - \ln x_2; \quad \frac{\partial}{\partial x_1} \ln y = \frac{1}{x_1}; \quad \frac{\partial}{\partial x_2} \ln y = -\frac{1}{x_2};$$

$$\delta(y^*) = \sum_{i=1}^2 \left| \frac{\partial}{\partial x_i} \ln y \right| |\Delta(x_i^*)| = \frac{1}{x_1} \Delta(x_1^*) + \frac{1}{x_2} \Delta(x_2^*) = \delta(x_1^*) + \delta(x_2^*);$$

$$\Delta(y^*) = y^* \delta(y^*) = \frac{x_1}{x_2} (\delta(x_1^*) + \delta(x_2^*)).$$

Выводы:

- абсолютная погрешность суммы или разности приближённых чисел равна сумме абсолютных погрешностей этих чисел.
- относительная погрешность произведения или частного от деления приближённых чисел равна сумме относительных погрешностей этих чисел.

4. Погрешность функции.

а). $y = x^n$

$$\ln y = n \ln x; \quad \frac{\partial}{\partial x} \ln y = n \frac{1}{x};$$

$$\delta(y^*) = \left| \frac{\partial}{\partial x} \ln y \right| |\Delta(x^*)| = n \frac{1}{x} |\Delta(x^*)| = n \delta(x^*);$$

$$\Delta(y^*) = y^* \delta(y^*) = x^n n \delta(x^*).$$

ПРИМЕР: Найти абсолютную и относительную погрешности вычисления $y = x^2$, где $x = 2$ задана со всеми точными цифрами.

Если 2 – точная цифра, то $\Delta(x^*) = 0.5$

$$\delta(x^*) = \frac{\Delta(x^*)}{x} = \frac{0.5}{2} = 0.25;$$

$$\delta(x^*) = n \delta(x^*) = 2 * 0.25 = 0.5;$$

$$\Delta(x^*) = y^* \delta(y^*) = x^2 \delta(y^*) = 2^2 * 0.5 = 2$$

Результат:

$$y = 4 \pm 2; \quad \Delta(y^*) = 2; \quad \delta(y^*) = 0.5$$

б). $y = \sin x$

$$\Delta(y^*) = \left| \frac{\partial y}{\partial x} \right| |\Delta(x^*)| = \cos x |\Delta(x^*)|;$$

$$\delta(y^*) = \frac{\Delta(y^*)}{y} = \frac{\cos x}{\sin x} |\Delta(x^*)| = \operatorname{ctg} x |\Delta(x^*)|;$$

5. Погрешность сложной функции.

ПРИМЕР: Используя переменные $a=0.2456$; $b=7.4182$; $c=3.651$; $d=13.84$; $e=12.50$ данные с верными цифрами, вычислить значение функции $P = ab^2 - dc + e$ и её абсолютную и относительную погрешности. Результат вычисления P округлить, оставив верхние и одну сомнительную цифры.

Для задания переменных строим таблицу:

Переменные	Абсолютная погрешность	Относительная погрешность
$a=0.2456$	$\Delta(a^*)=0.00005$	$\delta(a^*)=\Delta(a^*)/a=2.036 \cdot 10^{-4}$
$b=7.4182$	$\Delta(b^*)=0.00005$	$\delta(b^*)=\Delta(b^*)/b=6.740 \cdot 10^{-6}$
$c=3.651$	$\Delta(c^*)=0.0005$	$\delta(c^*)=\Delta(c^*)/c=1.369 \cdot 10^{-4}$
$d=13.84$	$\Delta(d^*)=0.005$	$\delta(d^*)=\Delta(d^*)/d=3.613 \cdot 10^{-4}$
$e=12.50$	$\Delta(e^*)=0.005$	$\delta(e^*)=\Delta(e^*)/e=4 \cdot 10^{-4}$

Функцию можно записать в следующем виде: $P = y_1 - y_2 + y_3$;

$$y_1 = ab^2; \ln y_1 = \ln a + 2 \ln b;$$

$$\frac{\partial \ln y_1}{\partial a} = \frac{1}{a}; \quad \frac{\partial \ln y_1}{\partial b} = 2 * \frac{1}{b};$$

$$\delta(y_1^*) = \frac{1}{a} |\Delta(a^*)| + 2 * \frac{1}{b} |\Delta(b^*)| = \delta(a^*) + 2\delta(b^*) = 2.1 * 10^{-4} + 2 * 6.7 * 10^{-6} \approx \approx 2.1 * 10^{-4};$$

$$\Delta(y_1^*) = y_1^* * \delta(y_1^*) = ab^2 \delta(y_1^*) = 0.2456 * 7.4182^2 * 2.1 * 10^{-4} \approx 2.8 * 10^{-3} = = 0.0028$$

$y_1^* = ab^2 = 0.2456 * 7.4182^2 \approx 13.5153$, здесь все верные и две сомнительные.

$$y_2 = d * c; \ln y_2 = \ln d + \ln c;$$

$$\frac{\partial \ln y_2}{\partial d} = \frac{1}{d}; \quad \frac{\partial \ln y_2}{\partial c} = \frac{1}{c};$$

$$\delta(y_2^*) = \frac{1}{d} |\Delta(d^*)| + \frac{1}{c} |\Delta(c^*)| = \delta(c^*) + \delta(d^*) = 3.6 * 10^{-4} + 1.4 * 10^{-4} = 5 * 10^{-4};$$

$$\Delta(y_2^*) = y_2^* \delta(y_2^*) = d * c * \delta(y_2^*) = 13.84 * 3.651 * 5 * 10^{-4} \approx 2.5 * 10^{-2} = 0.025;$$

$y_2^* = d * c = 13.84 * 3.651 \approx 50.5298 \approx 50.53$, здесь все верные и две сомнительные.

$$y_3 = e; \delta(e^*) = 4 * 10^{-4}; \quad \Delta(e^*) = 0.005.$$

Абсолютная погрешность функции:

$$P = y_1 - y_2 + y_3;$$

$$\frac{\partial P}{\partial y_1} = 1; \quad \frac{\partial P}{\partial y_2} = -1; \quad \frac{\partial P}{\partial y_3} = 1;$$

$$\Delta(P^*) = \Delta(y_1^*) + \Delta(y_2^*) + \Delta(y_3^*) = 0.0028 + 0.025 + 0.005 \approx 0.0328;$$

Значение функции:

$$P = y_1 - y_2 + y_3 = 13.5153 - 50.53 + 12.5 = -24.5147 \approx -24.6;$$

$$P = -24.6 \pm 0.03;$$

$$\delta(P^*) = \left| \frac{\Delta(P^*)}{P} \right| = \frac{0.058}{24.5147} \approx 0.0012.$$

ПРИМЕР: Вычислить значение заданной функции

$$P = \frac{d^2 \ln c}{\exp a}$$

оставив все точные и одну сомнительную цифры, если $d=135$ и $c=23$ заданы со всеми верными цифрами, а $a = 7.2$, задано с относительной погрешностью $\delta(a^*) = 2 * 10^{-4}$.

$$P = \frac{d^2 \ln c}{\exp a}; \quad \ln P = 2 \ln d + \ln \ln c - a;$$

$$\frac{\partial \ln P}{\partial d} = \frac{2}{d}; \quad \frac{\partial \ln P}{\partial c} = \frac{1}{c \ln c}; \quad \frac{\partial \ln P}{\partial a} = -1;$$

$$\delta(P^*) = 2\delta d + \frac{\delta c}{\ln c} + \Delta a;$$

Так как $d=135$ и $c=23$, принимаем $\Delta(d^*) = 0.5$ и $\Delta(c^*) = 0.5$. Тогда получим:

$$\Delta(a^*) = a * \delta(a^*) = 7.21 * 2 * 10^{-4};$$

$$\delta(d^*) = \frac{\Delta(d^*)}{d} = \frac{0.5}{135} = 0.0037;$$

$$\delta(c^*) = \frac{\Delta(c^*)}{c} = \frac{0.5}{23} = 0.022;$$

$$\delta(P^*) = 2 * 0.0037 + \frac{0.022}{3.135} + 0.0014 \approx 0.016;$$

$$P = \frac{135^2 \ln 23}{\exp 7.21} = \frac{135^2 * 3.13549}{1352.8923} = 42.2386;$$

$$\delta(P^*) \approx 0.016; \quad \Delta P = P * \delta(P^*) = 0.68;$$

Ответ: $P = 42 \pm 0.68$.

Замечание: При нахождении погрешностей можно использовать два варианта

1. Если у нас сумма переменных (или разность), то сначала считают абсолютную погрешность, а потом относительную.
2. Если у нас произведение или частное от деления переменных, то в начале ищут относительную погрешность, а затем абсолютную.

3. В общем случае эти два способа комбинируют.

Выводы

Для:

$$y = y(x_1, x_2, \dots, x_n), \text{ где } \{x_i\} \in G$$

Опр. Если y^* приближенное значение y , то предельной абсолютной погрешностью $\Delta(y^*)$ называют наилучшую при имеющейся информации оценку погрешности величины y^*

$$\Delta(y^*) = \sup |y(x_1, x_2, \dots, x_n) - y^*|.$$

Предельной относительной погрешностью называется величина

$$\delta(y^*) = \frac{\Delta(y^*)}{y^*}$$

Для функции нескольких переменных Формула Лагранжа:

$$y(x_1, x_2, \dots, x_n) - y^* = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f(c_j)}{\partial x_j} (x_j - x_j^*), \quad x_j \leq c_j \leq x_j^*$$

Откуда следует запись линейной погрешности

$$\Delta(y^*) \leq \sum_{j=1}^n \left| \frac{\partial f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_j} \right| |\Delta(x_j^*)|$$

Относительная погрешность:

$$\begin{aligned} \delta(y^*) = \frac{\Delta(y^*)}{y^*} &\leq \sum_{j=1}^n \left| \frac{\frac{\partial f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_j}}{y^*} \right| |\Delta(x_j^*)| = \\ &= \sum_{j=1}^n \left| \frac{\partial}{\partial x_j} \ln f(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) \right| |\Delta(x_j^*)| \end{aligned}$$

Для функции одной переменной $y = f(x)$ абсолютная погрешность имеет вид:

$$\Delta(y^*) = \left| \frac{\partial f}{\partial x} \Delta(x^*) \right|,$$

относительная погрешность:

$$\delta(y^*) = \left| \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\Delta(x^*)}{f(x)} \right|.$$

Для простых случаев:

1. Абсолютная погрешность суммы или разности приближенных чисел равна сумме абсолютных погрешностей этих чисел:

$$\Delta(y^*) = \sum_{i=1}^3 |\Delta(x_i^*)|.$$

2. Относительная погрешность произведения или частного от деления приближённых чисел равна сумме относительных погрешностей этих чисел:

$$\delta(y^*) = \sum_{i=1}^3 \delta(x_i^*).$$

Поэтому при нахождении погрешностей можно использовать два варианта:

1. Если у нас сумма переменных (или разность), то сначала считают абсолютную погрешность, а потом относительную.
2. Если у нас произведение или частное от деления переменных, то в начале ищут относительную погрешность, а затем абсолютную.
3. В общем случае эти два способа комбинируют.

Вопросы

1. Что принимают за предельную абсолютную погрешность функции нескольких переменных ?
2. Что называют предельной относительной погрешностью функции нескольких переменных ?
3. Запишите формулу Лагранжа для функции одной переменной.
4. Запишите формулу Лагранжа для функции нескольких переменных.
5. Запишите выражение для предельной абсолютной погрешности функции нескольких переменных.
6. Запишите выражение для предельной относительной погрешности функции нескольких переменных.
7. Запишите выражение для предельной абсолютной погрешности функции одной переменной.
8. Запишите выражение для предельной относительной погрешности функции одной переменной.
9. Чему равна абсолютная погрешность суммы или разности приближённых чисел ?
10. Чему равна относительная погрешность произведения или частного от деления приближённых ?
11. Какую погрешность считают в начале, если выражение представляет собой сумму переменных (или разность) ?
12. Какую погрешность считают в начале, если выражение представляет собой произведение или частное от деления переменных ?
13. Как считают погрешность, если выражение одновременно содержит сумму (разность) и произведение (частное от деления) переменных ?

Метод наименьших квадратов (МНК)

Опр. **Аппроксимация** – замена заданной модели приближенной.
Пусть заданна таблично функция $f(x_j)$:

x_j	x_0	x_1	...	x_n
$f(x_j)$	$f(x_0)$	$f(x_1)$...	$f(x_n)$

Выберем для замены этой функции аналитической приближенную функцию $y_m(x)$.

Опр. Под **невязками** будем понимать разность, на конечном множестве точек, между значениями выбранной функции и заданной:

$$\rho_j = f(x_j) - y_m(x_j)$$

Так как эта разность может быть разных знаков и при ее накоплении может в алгебраической сумме равняться нулю, то рассматриваются

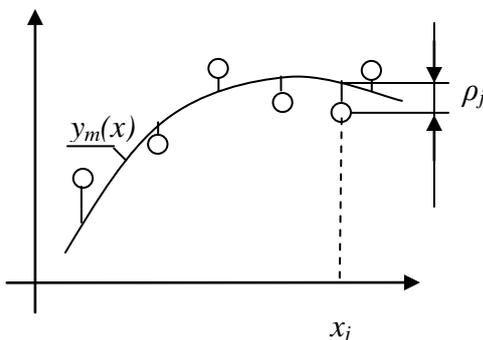


Рис. 1

квадраты невязок

Опр. **Метод наименьших квадратов (МНК)** – это метод аппроксимации, основанный на том, что сумма квадратов невязок заданной и приближенной функций сводится к минимуму.

Пусть в качестве аппроксимирующей функции выбран многочлен m -того порядка

$y_m(x) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + \dots + a_m \cdot x^m$ Для степени многочлена m выполня-

ется $m < n$.

Введем функцию S равную сумме квадратов невязок:

$$S = \sum_{j=0}^n \rho_j^2 = \sum_{j=0}^n [f(x_j) - y_m(x_j)]^2 = \sum_{j=0}^n [f(x_j) - a_0 - a_1 \cdot x_j - a_2 \cdot x_j^2 - \dots - a_m \cdot x_j^m]^2$$

Величина S является функцией независимых переменных a_0, a_1, \dots, a_m .

Следовательно: $S = S(a_0, a_1, a_2, \dots, a_m)$

Для нахождения этих переменных приравняем частные производные от S по a_k нулю:

$$\frac{\partial S}{\partial a_0} = -2 \sum_{j=0}^n [f(x_j) - a_0 - a_1 \cdot x_j - a_2 \cdot x_j^2 - \dots - a_m \cdot x_j^m] \cdot 1 = 0$$

$$\frac{\partial S}{\partial a_1} = -2 \sum_{j=0}^n [f(x_j) - a_0 - a_1 \cdot x_j - a_2 \cdot x_j^2 - \dots - a_m \cdot x_j^m] \cdot x_j = 0$$

$$\frac{\partial S}{\partial a_2} = -2 \sum_{j=0}^n [f(x_j) - a_0 - a_1 \cdot x_j - a_2 \cdot x_j^2 - \dots - a_m \cdot x_j^m] \cdot x_j^2 = 0$$

.....

$$\frac{\partial S}{\partial a_k} = -2 \sum_{j=0}^n [f(x_j) - a_0 - a_1 \cdot x_j - a_2 \cdot x_j^2 - \dots - a_m \cdot x_j^m] \cdot x_j^k = 0$$

.....

$$\frac{\partial S}{\partial a_m} = -2 \sum_{j=0}^n [f(x_j) - a_0 - a_1 \cdot x_j - a_2 \cdot x_j^2 - \dots - a_m \cdot x_j^m] \cdot x_j^m = 0$$

Раскрывая скобки, запишем:

$$a_0 \sum_{j=0}^n x_j^k + a_1 \sum_{j=0}^n x_j^{k+1} + a_2 \sum_{j=0}^n x_j^{k+2} + \dots + a_m \sum_{j=0}^n x_j^{k+m} = \sum_{j=0}^n f(x_j) \cdot x_j^k, \text{ где } k=0, 1, 2, \dots, m.$$

Если ввести обозначения:

$$S_k = \sum_{j=0}^n x_j^k \text{ и } b_k = \sum_{j=0}^n f(x_j) \cdot x_j^k, \text{ то получим систему уравнений вида:}$$

$$a_0 \cdot S_k + a_1 \cdot S_{k+1} + a_2 \cdot S_{k+2} + \dots + a_m \cdot S_{k+m} = b_k, \text{ где } k=0, 1, 2, \dots, m.$$

В развернутом виде система имеет записывается так:

$$a_0 \cdot S_0 + a_1 \cdot S_1 + a_2 \cdot S_2 + \dots + a_m \cdot S_m = b_0$$

$$a_0 \cdot S_1 + a_1 \cdot S_2 + a_2 \cdot S_3 + \dots + a_m \cdot S_{m+1} = b_1$$

$$a_0 \cdot S_2 + a_1 \cdot S_3 + a_2 \cdot S_4 + \dots + a_m \cdot S_{m+2} = b_2$$

...

$$a_0 \cdot S_m + a_1 \cdot S_{m+1} + a_2 \cdot S_{m+2} + \dots + a_m \cdot S_{2m} = b_m$$

Мы получили систему линейных уравнений $m+1$ – го порядка с $m+1$ неизвестными переменными a_0, a_1, \dots, a_m . Система совместна, определена и имеет решение.

ПРИМЕР. Используя МНК подобрать многочлен 2-го порядка для функции заданной таблично:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	-0.71	-0.01	0.51	0.82	0.88	0.81	0.49

Расчетные величины запишем в виде:

x^0	x	x^2	x^3	x^4	f(x)	f(x)·x	f(x)· x^2
1	-3	9	-27	81	-0.71	2.13	-6.39
1	-2	4	-8	16	-0.01	0.02	-0.04
1	-1	1	-1	1	0.51	-0.51	0.51
1	0	0	0	0	0.82	0	0
1	1	1	1	1	0.88	0.88	0.88
1	2	4	8	16	0.81	1.62	3.24
1	3	9	27	81	0.49	1.47	4.41
7	0	28	0	196	2.79	5.61	2.61
S_0	S_1	S_2	S_3	S_4	b_0	b_1	b_2

В нижней строке таблицы записаны суммы цифр столбцов и их обозначение. Получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} S_0 a_0 + S_1 a_1 + S_2 a_2 = b_0 \\ S_1 a_0 + S_2 a_1 + S_3 a_2 = b_1 \\ S_2 a_0 + S_3 a_1 + S_4 a_2 = b_2 \end{cases}$$

или если подставить значения:

$$\begin{cases} 7a_0 + 28a_2 = 2.79 \\ 28a_1 = 5.61 \\ 28a_0 + 196a_2 = 2/61 \end{cases}$$

Решая систему, получим:

$$a_0 = 0.806, a_1 = 0.200, a_2 = -0.102$$

Следовательно, аппроксимирующая функция имеет вид:

$$y_2 = 0.806 + 0.200x - 0.102x^2.$$

Замечания относительно рассмотренного метода наименьших квадратов (МНК)

На практике оценки неизвестных переменных a_0, a_1, \dots, a_m вычисляются по опытным данным $f(x_j)$, которые являются случайными величинами. Поэтому оценки неизвестных переменных a_0, a_1, \dots, a_m также являются случайными величинами.

Случайные величины характеризуются:

- среднеквадратической дисперсией;
- выборочной дисперсией.

Среднеквадратические и выборочные дисперсии позволяют построить доверительные интервалы для коэффициентов a_0, a_1, \dots, a_m и доверительную область для полученной аппроксимирующей функции.

В общем случае для метода наименьших квадратов (МНК) определение для a_0, a_1, \dots, a_m среднеквадратической и выборочной дисперсий сложно. Иногда, коэффициенты a_0, a_1, \dots, a_m являются коррелированными, что еще больше усложняет решение.

Для упрощения задачи нахождения характеристик случайных величин a_0, a_1, \dots, a_m , используют определенные условности.

Выводы

Опр. **Аппроксимация** – замена заданной модели приближенной.

Опр. Под **невязками** будем понимать разность, на конечном множестве точек, между значениями выбранной функции и заданной:

$$\rho_j = f(x_j) - y_m(x_j)$$

Эта разность может быть разных знаков и при ее накоплении может в алгебраической сумме равняться нулю. Поэтому рассматриваются квадраты невязок

Опр. Метод наименьших квадратов (МНК) – это метод аппроксимации, основанный на том, что сумма квадратов невязок заданной и приближенной функций сводится к минимуму.

Пусть $y_m(x) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + \dots + a_m \cdot x^m$ аппроксимирующий многочлен m -того порядка. Тогда сумма квадратов невязок как функция независимых переменных a_0, a_1, \dots, a_m равна:

$$S = \sum_{j=0}^n \rho_j^2 = \sum_{j=0}^n [f(x_j) - y_m(x_j)]^2 = \sum_{j=0}^n [f(x_j) - a_0 - a_1 \cdot x_j - a_2 \cdot x_j^2 - \dots - a_m \cdot x_j^m]^2$$

Если приравнять частные производные от S по a_k нулю и ввести обозначения:

$S_k = \sum_{j=0}^n x_j^k$ и $b_k = \sum_{j=0}^n f(x_j) \cdot x_j^k$, то получим систему уравнений вида:

$$a_0 \cdot S_k + a_1 \cdot S_{k+1} + a_2 \cdot S_{k+2} + \dots + a_m \cdot S_{k+m} = b_k, \text{ где } k=0, 1, 2, \dots, m.$$

Это система линейных уравнений $m+1$ – го порядка с $m+1$ неизвестными переменными a_0, a_1, \dots, a_m . Система совместна, определена и имеет решение.

Неизвестные переменные a_0, a_1, \dots, a_m вычисляются по опытным данным и являются случайными величинами.

Случайные величины характеризуются дисперсией. Среднеквадратические и выборочные дисперсии позволяют построить доверительные интервалы для коэффициентов a_0, a_1, \dots, a_m и доверительную область для аппроксимирующей функции.

Для упрощения задачи нахождения характеристик случайных величин a_0, a_1, \dots, a_m , используют определенные условности.

Вопросы

1. Что такое аппроксимация?
2. Что такое невязки?
3. Какой знак может принимать невязка?
4. Почему используют квадраты невязок?
5. Дайте определение метода наименьших квадратов (МНК).
6. Как определяется экстремум функции нескольких переменных?
7. Какие многочлены используются в МНК для аппроксимации заданных функций?
8. Какая система уравнений получается в методе наименьших квадратов?
9. При вычислении по экспериментальным данным, какими величинами являются неизвестные переменные a_0, a_1, \dots, a_m (коэффициенты аппроксимирующего многочлена)?

10. Чем характеризуются случайные величины?

11. Что позволяют построить характеристики случайных величин?

Планирование эксперимента

Тема 6

Задачи и методы математической статистики.

Результаты эксперимента изучаются методами математической статистики. Математическая статистика решает две задачи:

1. Как собирать статистические данные (наблюдаемые результаты эксперимента);

2. Как анализировать статистические данные (результаты эксперимента).

Вторая задача состоит из следующих задач:

А) оценка неизвестных

- вероятностей события;
- функций распределения;
- параметров распределения;
- зависимостей случайных величин.

Б) проверка:

- статистической гипотезы о виде неизвестного распределения;
- проверка, чему равны параметры неизвестного распределения.

Опр. Множество элементов изучаемых методами математической статистики называют **генеральной совокупностью** (ГС).

Элементы генеральной совокупности характеризуются признаками. Признаки могут быть представлены одной случайной величиной или системой нескольких случайных величин.

Для определения свойств генеральной совокупности используют выборку.

Опр. **Выборкой** или выборочной совокупностью называют часть генеральной совокупности используемой для определения свойств генеральной совокупности.

Опр. Число элементов выборки называется **объемом выборки**.

Опр. Выборку называют представительной или репрезентативной, если она организована так, что каждый элемент генеральной совокупности имеет одну и ту же вероятность попасть в состав выборки.

Характеристика генеральной совокупности определенная непосредственно по самой генеральной совокупности называются **вероятностной характеристикой**.

Характеристика генеральной совокупности определенная на основе данных выборки называются выборочной или **статистической характеристикой**.

Метод получения выборочной характеристики называется выборочным методом.

Статистическое оценивание параметров распределения.

Генеральная совокупность характеризуется определенными числовыми характеристиками:

- средним \bar{x}
- математическим ожиданием M ;
- дисперсией D ;
- среднеквадратическое отклонение σ ;
- моментами высших порядков m_s .

Опр. Среднее значение – это среднеарифметическое значение совокупности:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n}$$

Опр. Математическим ожиданием дискретной случайной величины называют сумму произведений всех ее возможных значений на их вероятности.

$$M(X) = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + x_3 \cdot p_3 + \dots + x_n \cdot p_n$$

Опр. Математическим ожиданием непрерывной случайной величины называют интеграл вида:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$$

Опр. Дисперсией дискретной случайной величины называют разность между математическим ожиданием квадрата случайной величины и квадратом ее математического ожидания:

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2$$

Опр. Дисперсией непрерывной случайной величины называют математическое ожидание квадрата ее отклонения:

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} [x - M(X)]^2 f(x)dx$$

Опр. Среднеквадратическое отклонение:

$$\sigma = \sqrt{D(X)}$$

Опр. Центральным моментом порядка k случайной величины X называют математическое ожидание величины $(X - M(X))^k$.

Параметры генеральной совокупности, как случайные непрерывные величины, описываются функцией распределения или плотностью распределения (вероятности).

Опр. **Функцией распределения** называют функцию $F(x)$, определяющую вероятность того, что случайная величина X в результате испытания примет значение, меньше x , то есть: $F(x) = P(X < x)$.

Где P - вероятность события.

Опр. **Плотностью распределения** $f(x)$ вероятностей случайной непрерывной величины X называют первую производную от функции распределения $F(x)$: $f(x) = F'(x)$.

Где $F(x)$ - функция распределения.

Различают параметры распределения и оценки параметров распределения.

Оценка параметров может осуществляются двумя методами:

- точечными оценками;
- доверительными интервалами.

Точечные оценки – это оценки параметров при помощи числовых значений. Эти числовые значения представляют собой приближенные величины неизвестных параметров определяемых по данным выборки. То есть точечные оценки – это оценки параметров.

Для обозначения можно использовать:

- для параметра – просто букву - M , D , m_s , m_e ;
- для оценок параметров – букву с крышкой \hat{M} , \hat{D} , \hat{m}_s , \hat{m}_e .

(Или например греческие и латынские буквы).

Доверительные интервалы – это интервалы, которые включают в себя с достаточно большой вероятностью истинные значения оцениваемых параметров.

Для оценки приближения (хорошее приближение или нет) вводят такие понятия как:

- несмещенность;
- эффективность;
- состоятельность.

Опр. **Несмещенной** называют статистическую оценку, математическое ожидание которой равно оцениваемому параметру α при любом объеме выборки: $M[\hat{\alpha}] = \alpha$.

Для несмещенной оценки отсутствует систематическая погрешность, зависящая от объема выборки.

Опр. **Эффективной** называют статистическую оценку, которая (при заданном объеме выборки) имеет наименьшую возможную дисперсию. Следовательно:

$$D[\hat{\alpha}] = \sigma_{\hat{\alpha}}^2 \rightarrow \min$$

Опр. **Состоятельной** называют статистическую оценку, которая при неограниченном увеличении объема выборки стремится по вероятности к оцениваемому параметру α : $\lim_{n \rightarrow \infty} P(|\alpha - \hat{\alpha}| < \varepsilon) = 1$. Свойство со-

стоятельности означает, что математическое ожидание оценки $M[\hat{\alpha}]$ стремится к оцениваемому параметру α , а ее дисперсия $D[\hat{\alpha}] = \sigma_{\hat{\alpha}}^2$ - к нулю, когда объем выборки, стремится к бесконечности ($n \rightarrow \infty$). Следовательно, для состоятельной статистической оценки:

$$\begin{aligned} M[\hat{\alpha}] &\rightarrow \alpha \\ D[\hat{\alpha}] &\rightarrow 0 \\ n &\rightarrow \infty \end{aligned}$$

Выводы

Математическая статистика решает две задачи:

1. Как собирать статистические данные (наблюдаемые результаты эксперимента);
2. Как анализировать статистические данные (результаты эксперимента).

Вторая задача состоит из следующих задач:

А) оценка неизвестных

- вероятностей события;
- функций распределения;
- параметров распределения;
- зависимостей случайных величин.

Б) проверка:

- статистической гипотезы о виде неизвестного распределения;
- проверка, чему равны параметры неизвестного распределения.

Опр. Множество элементов изучаемых методами математической статистики называют **генеральной совокупностью** (ГС).

Для определения свойств генеральной совокупности используют выборку.

Опр. **Выборкой** или выборочной совокупностью называют часть генеральной совокупности используемой для определения свойств генеральной совокупности.

Опр. Число элементов выборки называется **объемом выборки**.

Опр. Выборку называют представительной или репрезентативной, если она организована так, что каждый элемент генеральной совокупности имеет одну и ту же вероятность попасть в состав выборки.

Генеральная совокупность характеризуется определенными числовыми характеристиками:

- средним \bar{x}
- математическим ожиданием M ;
- дисперсией D ;
- среднеквадратическое отклонение σ ;
- моментами высших порядков m_s .

Опр. Среднее значение – это среднеарифметическое значение совокупности:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n}$$

Опр. Математическим ожиданием дискретной случайной величины называют сумму произведений всех ее возможных значений на их вероятности.

$$M(X) = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + x_3 \cdot p_3 + \dots + x_n \cdot p_n$$

Опр. Математическим ожиданием непрерывной случайной величины называют интеграл вида:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$$

Опр. Дисперсией дискретной случайной величины называют разность между математическим ожиданием квадрата случайной величины и квадратом ее математического ожидания:

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2$$

Опр. Дисперсией непрерывной случайной величины называют математическое ожидание квадрата ее отклонения:

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} [x - M(X)]^2 f(x)dx$$

Опр. Среднеквадратическое отклонение:

$$\sigma = \sqrt{D(X)}$$

Опр. Центральным моментом порядка k случайной величины X называют математическое ожидание величины $(X - M(X))^k$.

Опр. **Функцией распределения** называют функцию $F(x)$, определяющую вероятность того, что случайная величина X в результате испытания примет значение, меньше x , то есть: $F(x) = P(X < x)$.

Опр. **Плотностью распределения** $f(x)$ вероятностей случайной непрерывной величины X называют первую производную от функции распределения $F(x)$: $f(x) = F'(x)$.

Точечные оценки - представляют собой приближенные величины неизвестных параметров определяемых по данным выборки

Доверительные интервалы – это интервалы, которые включают в себя с достаточно большой вероятностью истинные значения оцениваемых параметров.

Приближения оценивают:

- несмещенность;
- эффективность;
- состоятельность.

Опр. **Несмещенной** называют статистическую оценку, математическое ожидание которой равно оцениваемому параметру α при любом объеме выборки: $M[\hat{\alpha}] = \alpha$.

Опр. **Эффективной** называют статистическую оценку, которая (при заданном объеме выборки) имеет наименьшую возможную дисперсию. Следовательно:

$$D[\hat{\alpha}] = \sigma_{\hat{\alpha}}^2 \rightarrow \min$$

Опр. **Состоятельной** называют статистическую оценку, которая при неограниченном увеличении объема выборки стремится по вероятности к оцениваемому параметру α : $\lim_{n \rightarrow \infty} P(|\alpha - \hat{\alpha}| < \varepsilon) = 1$.

Вопросы

Какие задачи решает математическая статистика

Какие задачи включает в себя анализ статистических данных

Что такое генеральная совокупность

Что используют для определения свойств генеральной совокупности

Что такое объем выборки

Что такое представительная выборка

Какими числовыми характеристиками характеризуется генеральная совокупность

Что такое среднее значение

Что такое математическое ожидание дискретной случайной величины

Что такое математическое ожидание непрерывной случайной величины

Что такое дисперсия дискретной случайной величины

Что такое дисперсия непрерывной случайной величины

Что такое среднеквадратическое отклонение

Что такое центральный момен

Что такое функция распределения

Что такое плотность распределения

Что такое точечная оценка

Что такое доверительный интервал

Чем оценивают приближения

Какая статистическая оценка называется несмещенной
 Какая статистическая оценка называется эффективной
 Какая статистическая оценка называется состоятельной

Планирование эксперимента

Тема 7

Задачи и методы математической статистики

Оценки максимального правдоподобия

Напоминание. Точечная оценка $\tilde{\theta}$ неизвестного параметра θ это приближенное значение этого параметра, полученное по выборке.

Самый простой метод статистического оценивания – метод подстановки или аналогии. Метод заключается в том, что в качестве оценки той или иной числовой характеристики (среднего \bar{x} или математического ожидания M , дисперсии D , среднеквадратического отклонения σ , моментами высших порядков m_s) генеральной совокупности берут соответствующую выборочную характеристику.

Оценки числовых характеристик.

1. Оценка математического ожидания

$$\bar{m}_x = \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

2. Оценка дисперсии при известном математическом ожидании

$$\bar{D}_x = \bar{\sigma}_x^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - m_x)^2$$

3. Оценка дисперсии при неизвестном математическом ожидании

$$\bar{D}_x^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

Записанные дисперсии (2,3) называют еще **выборочными** дисперсиями.

4. Несмещенная оценка.

$$\bar{D}_x = \frac{n}{n-1} \bar{D}_x^* = \bar{\sigma}_x^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

Несмещенную дисперсию называют еще **исправленной** дисперсией.

Оценка математического ожидания независимых, равнозначных и одинаково распределенных наблюдений.

Утверждение 1. Для n независимых, равнозначных и одинаково распределенных наблюдений X_1, X_2, \dots, X_n дисперсия оценки математического ожидания \bar{x} (называют еще дисперсией среднего выборочного) обратно пропорциональна объему выборки. Обозначают дисперсию оценки математического ожидания как $\sigma_{\bar{x}}^2$ или $\sigma^2(\bar{x})$. Следовательно:

$$\sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{\sigma^2}{n}.$$

◀ Выражение $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ для \bar{x} является взвешенной суммой независимых случайных величин (с весом $\frac{1}{n}$). Согласно теореме о дисперсии суммы случайных величин:

$$D[\bar{x}] = \sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{\sigma_{x1}^2 + \sigma_{x2}^2 + \dots + \sigma_{xn}^2}{n^2}$$

В силу равнозначности наблюдений $\sigma_{x1}^2 = \sigma_{x2}^2 = \dots = \sigma_{xn}^2 = \sigma_x^2$. Следова-

тельно, выражение для дисперсии среднего имеет вид: $\sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{n\sigma_x^2}{n^2} = \frac{\sigma_x^2}{n}$



Эта зависимость широко используется в теории эксперимента. Она показывает, что чем больше используется опытных данных для получения точечной оценки, тем меньше ее дисперсия и вышнее достоверность, или информативность.

Следствие. Ошибка среднеквадратического отклонения среднего в \sqrt{n} раз меньше ошибки среднеквадратического отклонения одного опыта или наблюдения:

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

Эта зависимость устанавливает связь между среднеквадратическими отклонениями выборочного среднего и одного наблюдения.

Несмещенная оценка.

Несмещенная оценка записывается в виде:

$$\bar{D}_x = \bar{\sigma}_x^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

В математической статистике выборочная дисперсия определяется как отношение суммы квадратов отклонений S к числу степеней свободы этой суммы f_S :

$$\sigma^2 = \frac{S}{f_S}$$

Число степеней свободы f_S равно числу независимых слагаемых в

сумме квадратов S . Например, в выражении $\bar{D}_x = \bar{\sigma}_x^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$

имеется n слагаемых $(x_i - \bar{x})^2$, но в силу вычисления среднего

$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ наложена одна связь вида $\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = 0$ или $\sum_{i=1}^n x_i = n\bar{x}$. По-

этому число независимых слагаемых составляет $n-1$ и эта величина является числом степеней свободы.

Опр. Числом степеней свободы называют разность между числом слагаемых в сумме квадратов и числом связей, наложенных на эти слагаемые.

Вычисления выражения $\bar{D}_x = \bar{\sigma}_x^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$ трудоемки и при малых значениях разностей $(x_i - \bar{x})$ могут порождать большие ошибки.

Поэтому вместо выражения $\bar{D}_x = \bar{\sigma}_x^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$ используют то-

ждественным соотношением $\bar{\sigma}_x^2 = \frac{1}{n-1} \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2 \right)$ или

$$\bar{\sigma}_x^2 = \frac{1}{n-1} \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n \bar{x}_i \right)^2 \right).$$

Арифметическое значение корня квадратного из оценки дисперсии $\sigma_x = \sqrt{\sigma_x^2}$ является оценкой среднеквадратического отклонения (называют еще оценкой стандарта σ_x).

Из равносильных выражений $\bar{\sigma}_x^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$,

$\bar{\sigma}_x^2 = \frac{1}{n-1} \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2 \right)$, $\bar{\sigma}_x^2 = \frac{1}{n-1} \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n \bar{x}_i \right)^2 \right)$ следуют важ-

ные для практики тождества:

$$\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n \bar{x}_i \right)^2,$$

которые справедливы для независимых случайных величин x_j .

Замечание относительно зависимых случайных величин. Величины x_j не всегда бывают независимыми. В этом случае вводятся оценки корреляции и оценки должны учитывать зависимости случайных величин. Замечание. В математической статистике любая функция случайных величин называется **статистикой**. Построенные выражения для \bar{x} , $\bar{\sigma}_x^2$ являются статистиками.

Выводы

Метод подстановки или аналогии – это метод статистического оценивания. В этом методе в качестве оценки той или иной числовой характеристики (среднего \bar{x} или математического ожидания M , дисперсии D , среднеквадратического отклонения σ , моментами высших порядков m_s) генеральной совокупности берут соответствующую выборочную характеристику.

Различают:

1. Оценка математического ожидания

$$\bar{m}_x = \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

2. Оценка дисперсии при известном математическом ожидании

$$\bar{D}_x = \bar{\sigma}_x^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - m_x)^2$$

3. Оценка дисперсии при неизвестном математическом ожидании

$$\bar{D}_x^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

Записанные дисперсии (2,3) называют еще **выборочными** дисперсиями.

4. Несмещенная оценка.

$$\bar{D}_x = \frac{n}{n-1} \bar{D}_x^* = \bar{\sigma}_x^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

Несмещенную дисперсию называют еще **исправленной** дисперсией.

Для n независимых, равноточных и одинаково распределенных наблюдений X_1, X_2, \dots, X_n дисперсия оценки математического ожидания \bar{x} обратна пропорциональна объему выборки:

$$\sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{\sigma^2}{n}.$$

Зависимость показывает, что чем больше используется опытных данных для получения точечной оценки, тем меньше ее дисперсия и выше ее достоверность.

Ошибка среднеквадратического отклонения среднего в \sqrt{n} раз меньше ошибки среднеквадратического отклонения одного опыта или наблюдения:

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

Зависимость устанавливает связь между среднеквадратическими отклонениями выборочного среднего и одного наблюдения.

В математической статистике выборочная дисперсия определяется как отношение суммы квадратов отклонений S к числу степеней свободы этой суммы f_S :

$$\sigma^2 = \frac{S}{f_S}$$

Число степеней свободы f_S равно числу независимых слагаемых в

сумме квадратов S . В выражении $\bar{D}_x = \bar{\sigma}_x^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$ число не-

зависимых слагаемых составляет $n-1$ и эта величина является числом степеней свободы.

Опр. **Числом степеней** свободы называют разность между числом слагаемых в сумме квадратов и числом связей, наложенных на эти слагаемые.

На практике вместо выражения $\bar{\sigma}_x^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$ используют

тождественным соотношением:

$$\bar{\sigma}_x^2 = \frac{1}{n-1} \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2 \right) \text{ или } \bar{\sigma}_x^2 = \frac{1}{n-1} \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n \bar{x}_i \right)^2 \right).$$

Следовательно для независимых случайных величин x_i справедливы тождества:

$$\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n \bar{x}_i \right)^2.$$

Арифметическое значение корня квадратного из оценки дисперсии $\sigma_x = \sqrt{\bar{\sigma}_x^2}$ является оценкой среднеквадратического отклонения (называют еще оценкой стандарта σ_x).

Для зависимых x_i вводятся оценки корреляции учитывающие зависимости случайных величин.

В математической статистике функции случайных величин \bar{x} , $\bar{\sigma}_x^2$ называются **статистикой**.

Вопросы

Что такое метод подстановки ?

Что выбирают в качестве оценки числовой характеристики в методе подстановки ?

Перечислите наименования оценок числовых характеристик.

Запишите выражение оценки математического ожидания.

Запишите выражение оценки выборочных дисперсий.

Чему равна дисперсия оценки математического ожидания \bar{x} для n независимых, равноточных и одинаково распределенных наблюдений?

Что показывает зависимость дисперсии оценки математического ожидания \bar{x} для n независимых, равноточных и одинаково распределенных наблюдений?

Как связана ошибка среднеквадратического отклонения среднего с ошибкой среднеквадратического отклонения одного опыта?

Как определяется в математической статистике выборочная дисперсия относительно суммы квадратов отклонений S ?

Чему равно число степеней свободы f_S для $\overline{\sigma}_x^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$?

Что называют числом степеней свободы?

Перечислите тождественные выражения для $\overline{\sigma}_x^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$.

Что является оценкой среднеквадратического отклонения (называют еще оценкой стандарта σ_x) ?

Что вводят для оценки зависимых случайных величин?

Как называют в математической статистике функции случайных величин \bar{x} , $\overline{\sigma}_x^2$?

Планирование эксперимента

Тема 8

Распределения, применяемые в математической статистике.

Математическая статистика для решения задач использует специальные виды функций распределений. Основные из них:

- равновероятное распределение;
- распределение Симпсона;
- экспоненциальное распределение;
- нормальное распределение;
- хи квадрат распределение;
- распределение Стьюдента;
- распределение Фишера.

Равновероятный закон распределения.

Это закон равномерного распределения вероятностей.

Опр. Распределение вероятностей называют равномерным, если на интервале, которому принадлежат все возможные значения случайной величины, плотность распределения сохраняет постоянной значение.

Плотность вероятности распределения имеет вид:	Функция распределения вероятностей:
--	-------------------------------------

$f(x) = \begin{cases} 0, & x \notin [a, b] \\ \frac{1}{b-a}, & x \in [a, b] \end{cases}$	$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a < x \leq b \\ 1, & x > b \end{cases}$
--	---

Графики записанных функций имеют вид:

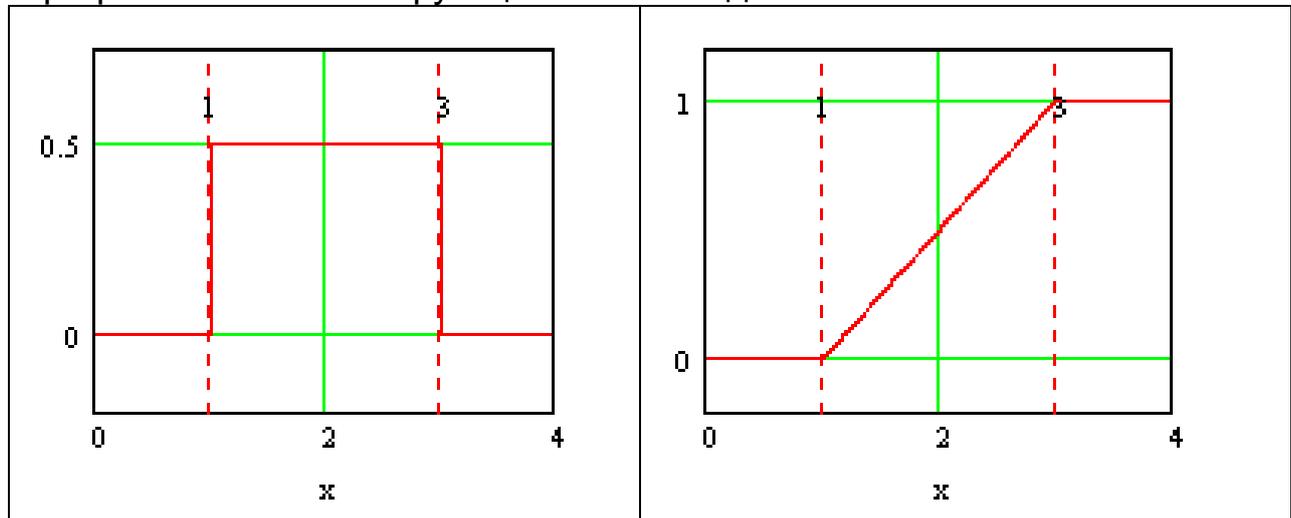


Рис.1. Плотность распределения равномерного распределения.

Рис.2. Функция распределения равномерного распределения

Математическое ожидание случайной величины для равномерного распределения:

$$M[X] = \frac{a+b}{2}$$

Дисперсия случайной величины для равномерного распределения:

$$D[X] = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Закон Симпсона (треугольный закон).

Плотность вероятности распределения имеет вид:	Функция распределения вероятностей:
$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq a \\ \frac{4(x-a)}{(b-a)^2}, & a < x \leq \frac{a+b}{2} \\ \frac{4(b-x)}{(b-a)^2}, & \frac{a+b}{2} < x \leq b \\ 0, & x > b \end{cases}$	$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq a \\ \frac{2(x-a)^2}{(b-a)^2}, & a < x \leq \frac{a+b}{2} \\ 1 - \frac{2(b-x)^2}{(b-a)^2}, & \frac{a+b}{2} < x \leq b \\ 0, & x > b \end{cases}$

Графики записанных функций имеют вид:

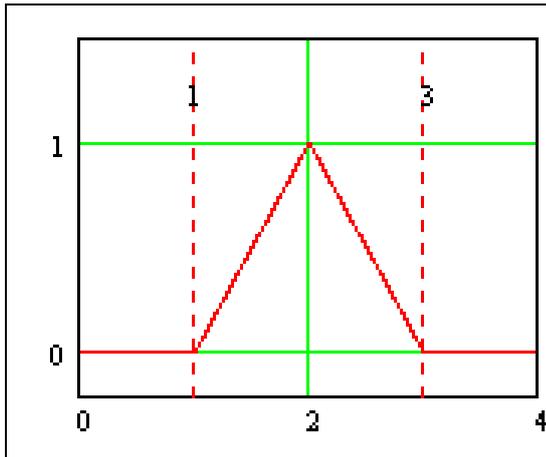


Рис.3.Плотность распределения закона Симпсона для $a=1$ и $b=3$.

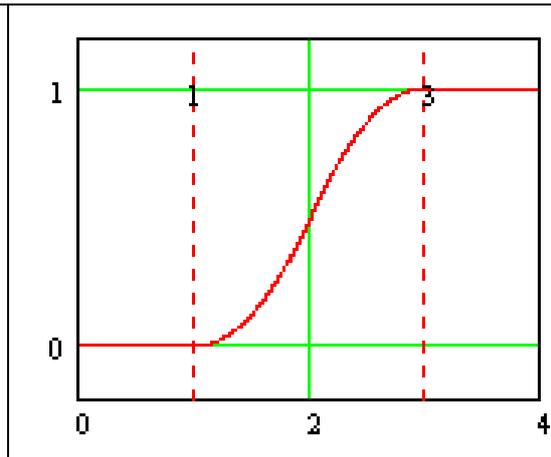


Рис.4.Функция распределения закона Симпсона $a=1$ и $b=3$.

Математическое ожидание случайной величины для закона Симпсона.

$$M[X] = \frac{a+b}{2}$$

Дисперсия случайной величины для закона Симпсона:

$$D[X] = \frac{(b-a)^2}{24}$$

Экспоненциальное (показательное) распределение.

Плотность вероятности распределения имеет вид:	Функция распределения вероятностей:
$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \lambda \cdot \exp(-\lambda \cdot x), & x \geq 0 \end{cases}$	$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - \exp(-\lambda \cdot x), & x \geq 0 \end{cases}$

Графики записанных функций имеют вид:

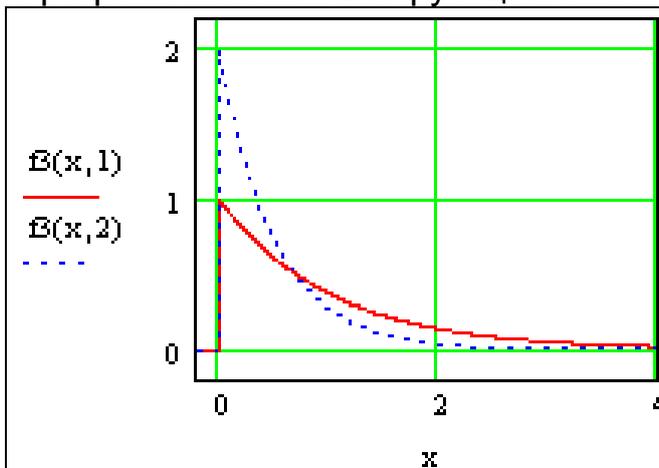


Рис.5.Плотность распределения экспоненциального закона для $\lambda=1$ и $\lambda=2$.

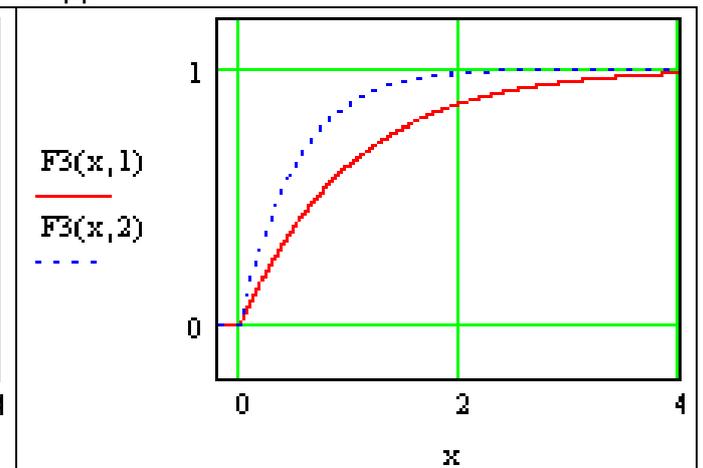


Рис.6.Функция распределения экспоненциального закона для $\lambda=1$ и $\lambda=2$.

Математическое ожидание случайной величины для экспоненциального закона:

$$M[X] = \frac{1}{\lambda}$$

Дисперсия случайной величины для экспоненциального закона:

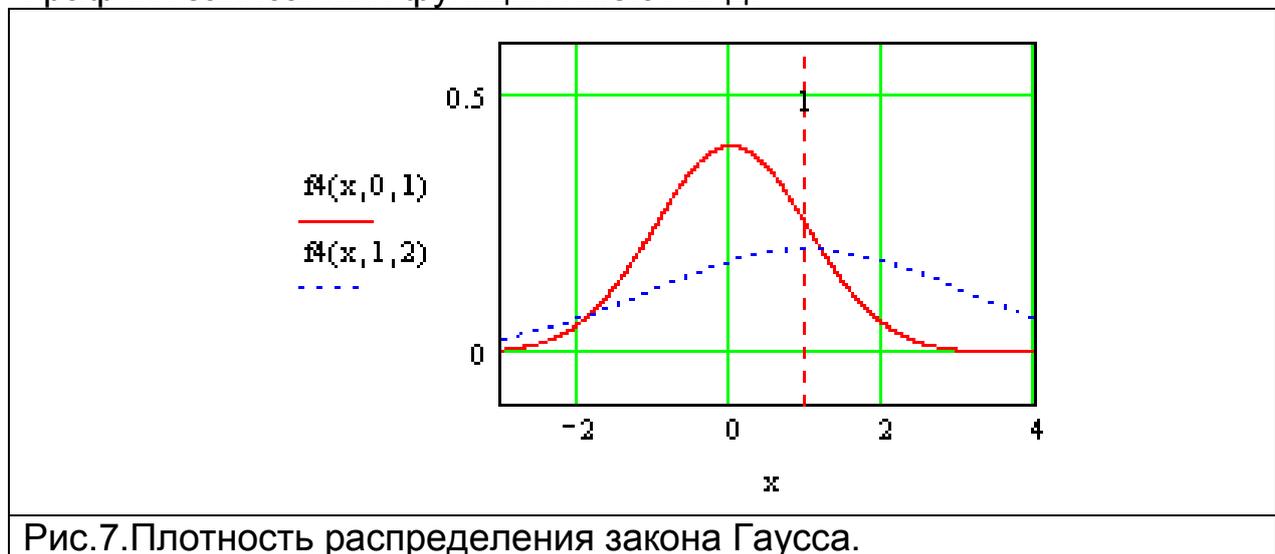
$$D[X] = \frac{1}{\lambda^2}$$

Нормальное распределение (закон Гаусса).

Нормальное распределение определяется двумя параметрами – математическим ожиданием $M[X] = a$ и среднеквадратическим отклонением σ . Величина: $z = \frac{x - a}{\sigma}$ имеет математическое ожидание равно 0, дисперсию и среднеквадратическое отклонение равные 1 и называется нормированной нормально распределенной случайной величиной.

Плотность вероятности распределения имеет вид:	Функция распределения вероятностей:
$f(x, a, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right)$	$F(x, a, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^x \exp\left(-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}\right) dt$

Графики записанных функций имеют вид:



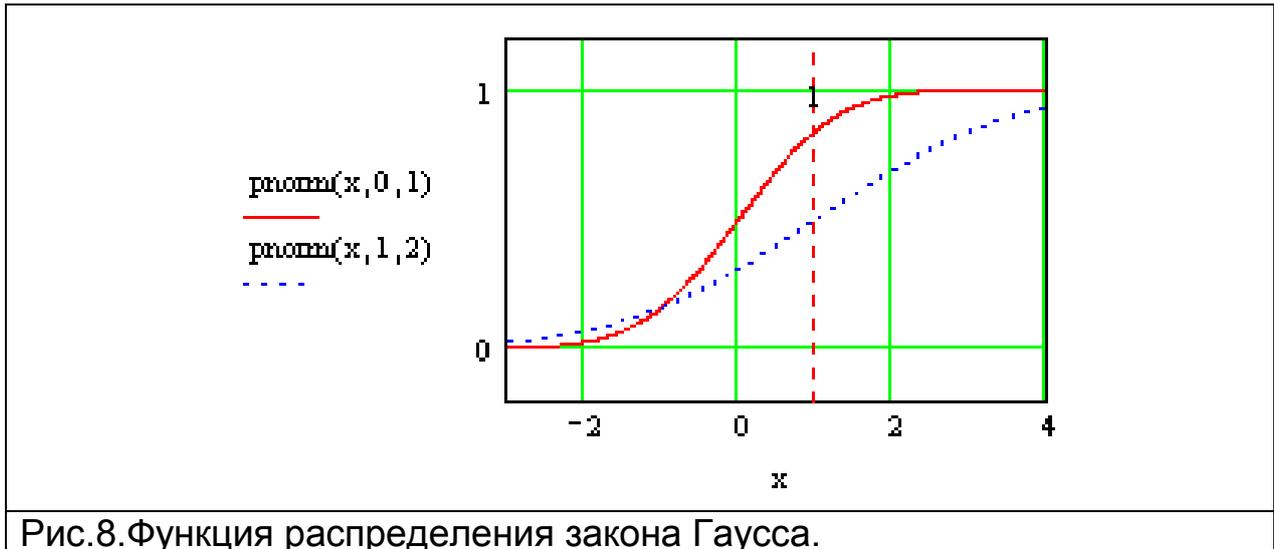


Рис.8. Функция распределения закона Гаусса.

Плотность вероятности для нормированной нормально распределенной случайной величиной равна:

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right)$$

и обозначается символом $z \sim N(0, 1)$. Вероятность попадания случайной величины в интервал $(-3, 3)$ длиной $6\sigma_z$ равна 0.9973. В большинстве практических задач такую вероятность принимают за 1. Это равносильно предположению, что все распределение заключено в интервале $(-3, 3)$.

Вероятность попадания случайной величины в интервал $[-a, a]$:

$$P(-a \leq z \leq a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^a \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz$$

Решение ряда задач связано с отысканием симметричного отрезка $[-z_\alpha, z_\alpha]$ соответствующего вероятности $P=1-\alpha$. Величину z_α находят из уравнения:

$$P(|z| \leq z_\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-z_\alpha}^{z_\alpha} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz = 1 - \alpha.$$

Для решения этого уравнения используют таблицы интегралов вероятности.

Широкое применение нормального распределения вытекает из центральной предельной теоремы теории вероятностей: при суммировании достаточно большого числа независимых случайных величин закон распределения суммы этих величин неограниченно приближается к нормальному закону.

Математическое ожидание случайной величины для закона Гаусса:

$$M[X] = a$$

Дисперсия случайной величины для закона Гаусса:

$$D[X] = \sigma^2$$

В основе многих распределений лежит нормальный закон.
Замечание. Следующие два закона являются производными от нормального закона распределения. (“хи квадрат” распределение, распределение Стьюдента)

Выводы

Основные функции распределения:

- равновероятное распределение;
- распределение Симпсона;
- экспоненциальное распределение;
- нормальное распределение;
- хи квадрат распределение;
- распределение Стьюдента;
- распределение Фишера.

1. Распределение вероятностей называют равномерным, если на интервале, которому принадлежат все возможные значения случайной величины, плотность распределения сохраняет постоянное значение.

Плотность вероятности распределения:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \notin [a, b] \\ \frac{1}{b-a}, & x \in [a, b] \end{cases}$$

Функция распределения вероятностей:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a < x \leq b \\ 1, & x > b \end{cases}$$

Математическое ожидание:

$$M[X] = \frac{a+b}{2}$$

Дисперсия случайной величины:

$$D[X] = \frac{(b-a)^2}{12}$$

2. Закон Симпсона (треугольный закон).

Плотность вероятности распределения имеет вид:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq a \\ \frac{4(x-a)}{(b-a)^2}, & a < x \leq \frac{a+b}{2} \\ \frac{4(b-x)}{(b-a)^2}, & \frac{a+b}{2} < x \leq b \\ 0, & x > b \end{cases}$$

Функция распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq a \\ \frac{2(x-a)^2}{(b-a)^2}, & a < x \leq \frac{a+b}{2} \\ 1 - \frac{2(b-x)^2}{(b-a)^2}, & \frac{a+b}{2} < x \leq b \\ 0, & x > b \end{cases}$$

Математическое ожидание

$$M[X] = \frac{a+b}{2}$$

Дисперсия случайной величины для закона Симпсона:

$$D[X] = \frac{(b-a)^2}{24}$$

3. Экспоненциальное (показательное) распределение.

Плотность вероятности распределения имеет вид:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \lambda \cdot \exp(-\lambda \cdot x), & x \geq 0 \end{cases}$$

Функция распределения вероятностей:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - \exp(-\lambda \cdot x), & x \geq 0 \end{cases}$$

Математическое ожидание:

$$M[X] = \frac{1}{\lambda}$$

Дисперсия случайной величины:

$$D[X] = \frac{1}{\lambda^2}$$

4. Нормальное распределение (закон Гаусса) определяется двумя параметрами – математическим ожиданием $M[X] = a$ и среднеквадратическим отклонением σ

Плотность вероятности:

$$f(x, a, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right)$$

Функция распределения вероятностей

$$F(x, a, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^x \exp\left(-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}\right) dt$$

Величина: $z = \frac{x-a}{\sigma}$ называется нормированной нормально распределенной случайной величиной.

Плотность вероятности для нормированной нормально распределенной случайной величиной:

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right)$$

и обозначается символом $z \sim N(0, 1)$.

Считают, что все распределение заключено в интервале $(-3, 3)$.

Вероятность попадания случайной величины в интервал $[-a, a]$:

$$P(-a \leq z \leq a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^a \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz$$

Для решения такого уравнения используют таблицы интегралов вероятности.

Центральная предельная теорема: при суммировании достаточно большого числа независимых случайных величин, закон распределения суммы этих величин приближается к нормальному закону.

Математическое ожидание случайной величины для закона Гаусса:

$$M[X] = a$$

Дисперсия случайной величины для закона Гаусса:

$$D[X] = \sigma^2$$

В основе многих распределений (хи квадрат распределения, распределения Стьюдента, распределения Фишера) лежит нормальный закон.

Вопросы

1. Перечислите основные функции распределения
2. Какое распределение вероятностей называют равномерным
3. Чему равна плотность вероятности равномерного распределения:
4. Чему равна функция распределения вероятности равномерного распределения:
5. Чему равно математическое ожидание равномерного распределения
6. Чему равно дисперсия случайной величины равномерного распределения
7. Чему равна плотность вероятности треугольного распределения (распределения Симпсона)
8. Чему равна функция распределения вероятности треугольного распределения (распределения Симпсона)
9. Чему равно математическое ожидание треугольного распределения (распределения Симпсона)
10. Чему равно дисперсия случайной величины треугольного распределения (распределения Симпсона)
11. Чему равна плотность вероятности экспоненциального (показательного) распределения
12. Чему равна функция распределения вероятности экспоненциального (показательного) распределения

13. Чему равно математическое ожидание экспоненциального (показательного) распределения
14. Чему равно дисперсия случайной величины экспоненциального (показательного) распределения
15. Какими параметрами определяется нормальное распределение (закон Гаусса)
16. Чему равна плотность вероятности нормального распределения (закона Гаусса)
17. Чему равна функция распределения вероятности нормального распределения (закона Гаусса)
18. Какая величина называется нормированной нормально распределенной случайной величиной для закона Гаусса.
19. Чему равна плотность вероятности для нормированной нормально распределенной случайной величиной
20. Как обозначается плотность вероятности для нормированной нормально распределенной случайной величиной
21. В каком интервале считают заключено все распределение при нормальном распределении
22. Как определяется вероятность попадания случайной величины в интервал $[-a, a]$
23. Что используют для решения уравнения определения вероятности попадания случайной величины в интервал $[-a, a]$
24. Как читается центральная предельная теорема
25. Чему равно математическое ожидание случайной величины для закона Гаусса
26. Чему равно дисперсия случайной величины для закона Гаусса
27. Что лежит в основе распределений хи квадрат, распределения Стьюдента, распределения Фишера.

Планирование эксперимента

Тема 9

Распределения, применяемые в математической статистике.
(продолжение)

χ^2 распределение.

Это распределение используется для:

- построения доверительных интервалов;
- проверки соответствия эмпирического распределения некоторой теоретической зависимости;
- построения других распределений.

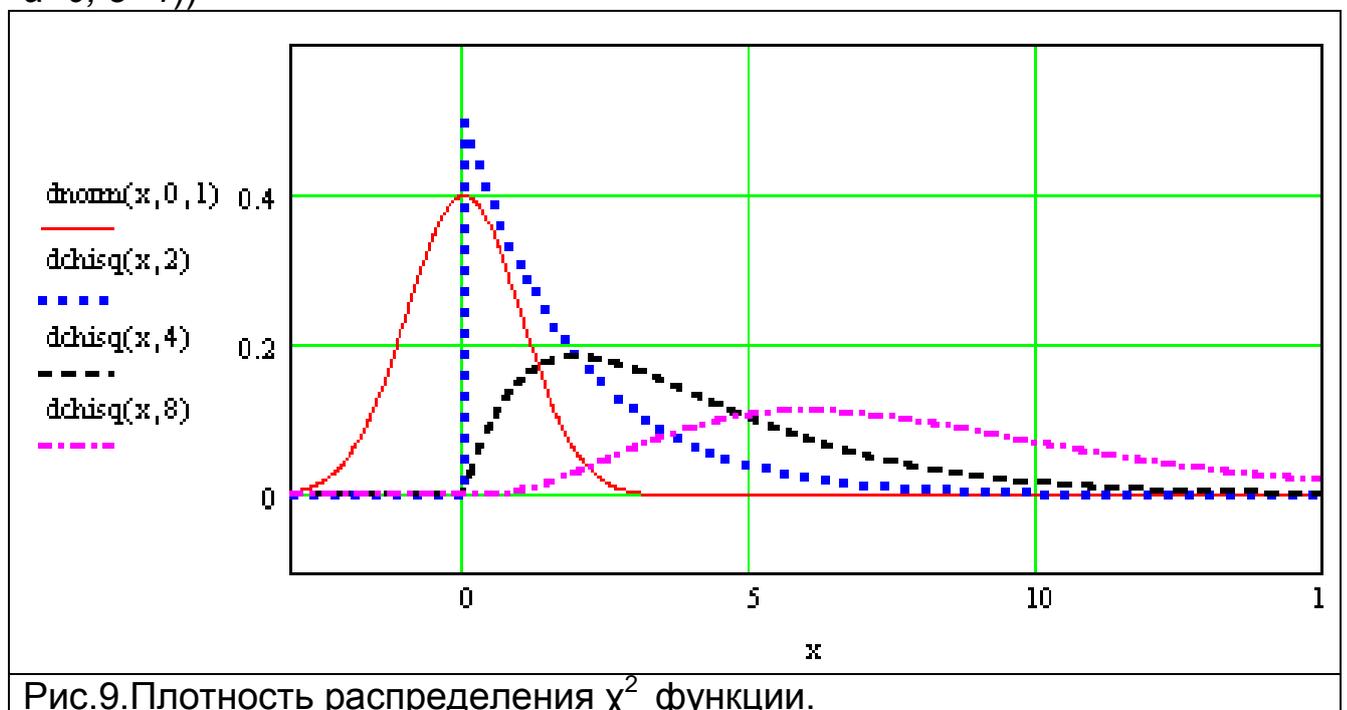
Пусть имеется x_1, x_2, \dots, x_n независимых, нормально распределенных случайных величин с математическим ожиданием, равным нулю и единичными дисперсиями. В этом случае сумма квадратов этих величин $\chi^2_n = \sum_{i=1}^n x_i^2$ распределена по закону, который называется "хи квадрат" распределение с $k=n$ степенями свободы. Число степеней свободы равно числу независимых слагаемых в приведенной сумме. Если на слагаемые наложено l связей, то число степеней свободы будет равно $n-l$.

Распределение хи-квадрат полностью определяется числом степеней свободы и не зависит от других параметров.

Плотность вероятности распределения имеет вид:

$$f(x, k) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \frac{x^{\frac{k}{2}-1} \cdot e^{-\frac{x}{2}}}{2^{\frac{k}{2}} \cdot \Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}, & x > 0. \end{cases} \text{ Здесь } \Gamma(z) = \int_0^{\infty} z^{t-1} e^{-t} dt$$

Графики записанной плотности распределения χ^2 функции для степеней свободы $k=2, 4, 8$ представлены на рис.9. Для сравнения здесь же представлена плотность распределения нормального закона ($\text{dnorm}(x, a=0, \sigma=1)$)



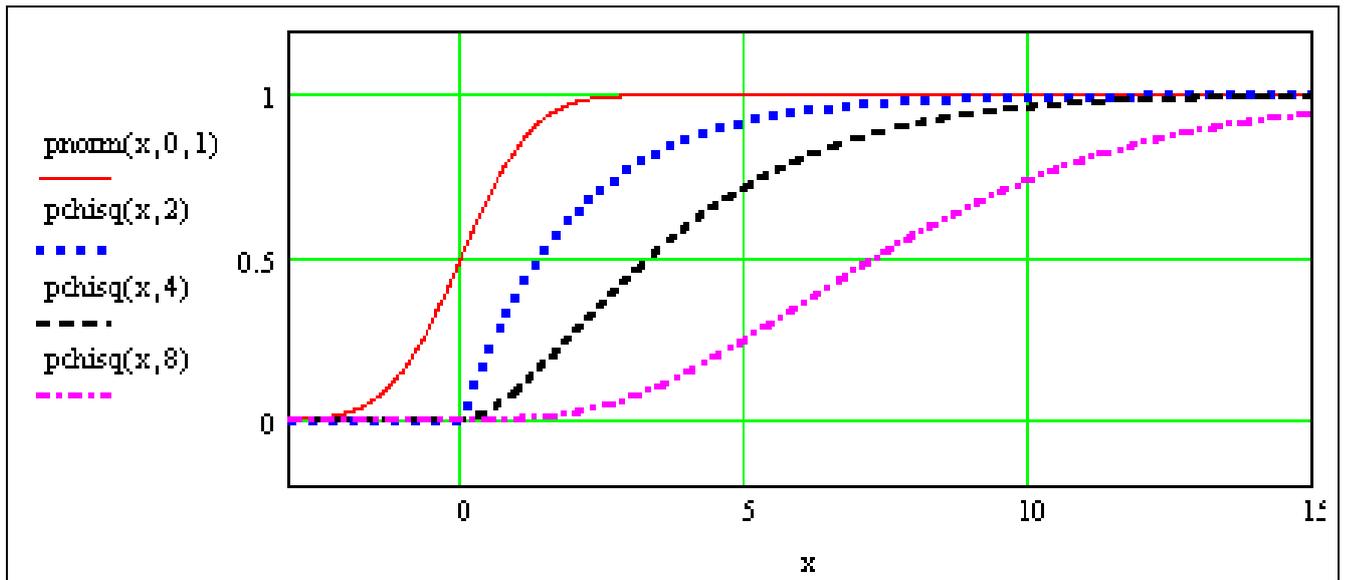


Рис.10. Функция распределения χ^2 функции для степеней свободы $k=2, 4, 8$. Для сравнения здесь же представлена функция распределения нормального закона ($\text{pnorm}(x, a=0, \sigma=1)$)

Плотность распределения для $k=1$ и $k=2$ монотонна, а при $k>2$ одновершинная и несимметрична. Распределение является асимптотически нормальным, то есть при $n \rightarrow \infty$ хи-распределение приближается к нормальному.

Математическое ожидание случайной величины для χ^2 закона.

$$M[\chi^2] = k$$

Дисперсия случайной величины для χ^2 закона:

$$D[\chi^2] = 2 \cdot k$$

Для хи-распределения имеет место теорема разложения. Если $\chi^2_1, \chi^2_2, \chi^2_3, \dots, \chi^2_n$ - независимые случайные величины, имеющие распределение χ^2 с $k_1, k_2, k_3, \dots, k_n$ степенями свободы соответственно, то сумма этих случайных величин имеет распределение χ^2 с $k_1 + k_2 + k_3 + \dots + k_n$ степенями свободы. Верно также и обратное утверждение.

Распределение Стьюдента.

Распределение Стьюдента или t-распределение используется для построения доверительных интервалов

Пусть Y – нормальная случайная величина, при чем $M[Y]=0$, $\sigma[Y]=1$, а Z независимая от Y величина, которая распределена по закону χ^2 с k степенями свободы. Тогда величина:

$$X(k) = \frac{Y}{\sqrt{\frac{Z}{k}}}$$

имеет распределение, которое называется t -распределением или распределением Стьюдента с k степенями свободы.

Опр. Распределением Стьюдента называется распределение, получаемое для случайной величины образованной отношением нормированной величины к квадратному корню из частного от деления независимой случайной величины, распределенной по закону “хи квадрат” к величине степени свободы этой величины.

Плотность вероятности распределения Стьюдента :

$$f(x, k) = \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)\sqrt{\pi k}} \left(1 + \frac{x^2}{k}\right)^{-\frac{k+1}{2}}$$

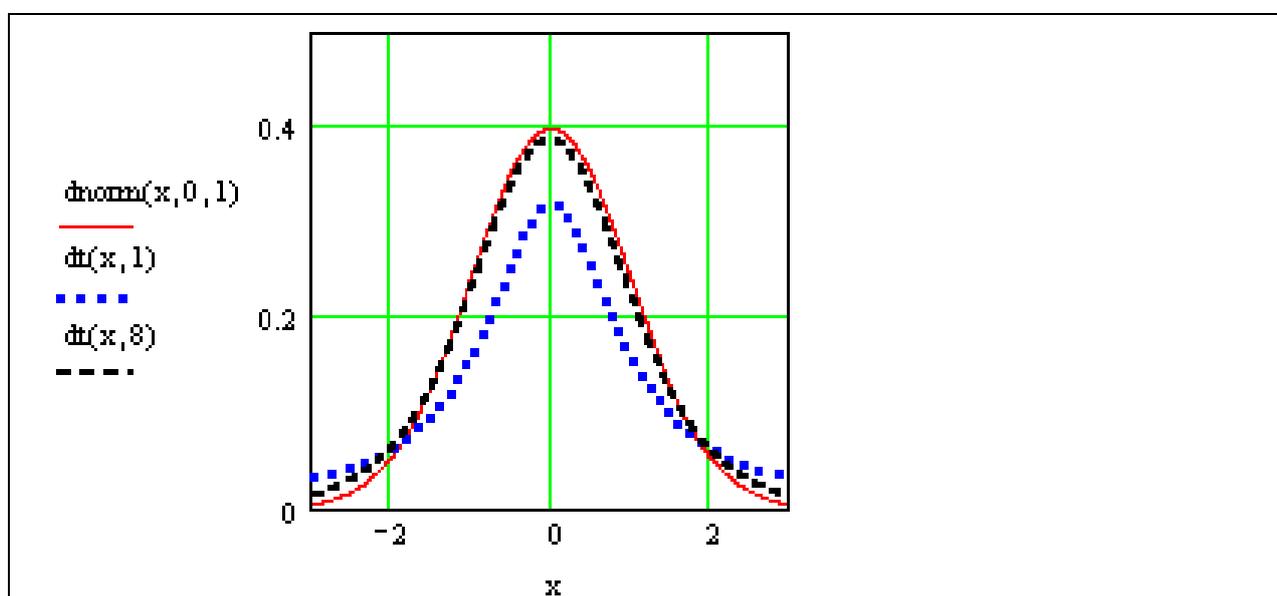


Рис.11. Плотность распределения закона Стьюдента для степеней свободы $k=1, 8$. Для сравнения здесь же представлена плотность распределения нормального закона ($\text{dnorm}(x, a=0, \sigma=1)$).

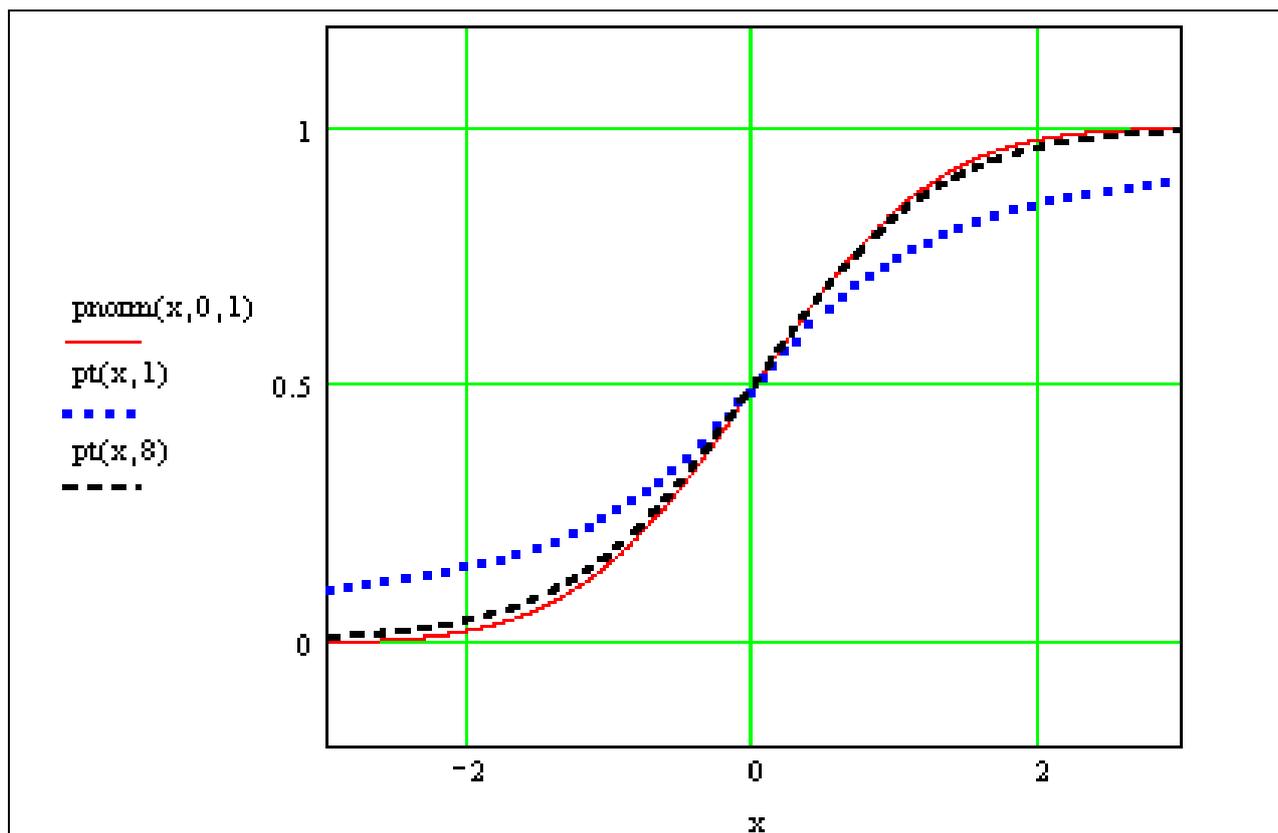


Рис. 12. Функция распределения закона Стьюдента для степеней свободы $k=1, 8$. Для сравнения здесь же представлена функция распределения нормального закона ($\text{rnorm}(x, a=0, \sigma=1)$).

Распределение Стьюдента определяется числом степеней свободы k , является симметричным, одновершинным и асимптотически нормальным. При $k > 30$ оно практически совпадает с нормальным распределением.

Математическое ожидание случайной величины для закона Стьюдента.

$$M[X, k] = 0$$

Дисперсия случайной величины для закона Стьюдента:

$$D[X, k] = \frac{k}{k-2}, \quad k > 2$$

Функция распределения Стьюдента табулирована. Таблица распределения Стьюдента имеет два входа – число степеней свободы k и уровень значимости α . На пересечении их значений и находится значение $t_{\text{табл.}}$, которое удовлетворяет условию:

$$P(|t| \leq t_{\text{табл.}}) = \int_{-t_{\text{табл.}}}^{t_{\text{табл.}}} f(t, k) dt = 1 - \alpha$$

Распределение Фишера.

Распределение Фишера используется при анализе выборочных данных, полученных из нормальной генеральной совокупности.

Пусть Y и Z – независимые случайные величины распределенные по закону χ^2 со степенями свободы k_1, k_2 . Тогда величина:

$$X(k_1, k_2) = \frac{Y/k_1}{Z/k_2}$$

имеет распределение, которое называется F -распределением или распределением Фишера со степенями свободы k_1, k_2 .

Опр. Распределением Фишера называется распределение, получаемое для случайной величины равной отношению двух независимых случайных величин, распределенных по закону “хи квадрат” с соответственно k_1, k_2 степенями свободы.

Плотность вероятности распределения Фишера:

$$f(x, k_1, k_2) = \frac{\Gamma\left(\frac{k_1 + k_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k_1}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{k_2}{2}\right)} \left(\frac{k_1}{k_2}\right)^{\frac{k_1}{2}} \frac{x^{\frac{k_1}{2}-1}}{\left(1 + \frac{k_1}{k_2}x\right)^{\frac{k_1+k_2}{2}}}, \quad x > 0$$

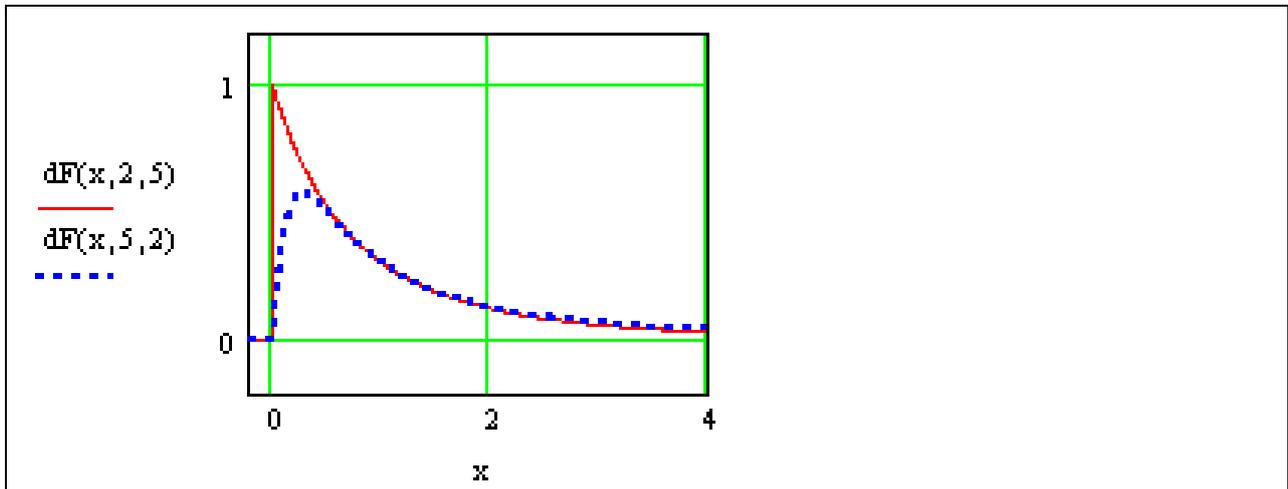


Рис.13. Плотность распределения закона Фишера для степеней свободы $k_1=2, k_2=5$ и $k_1=5, k_2=2$.

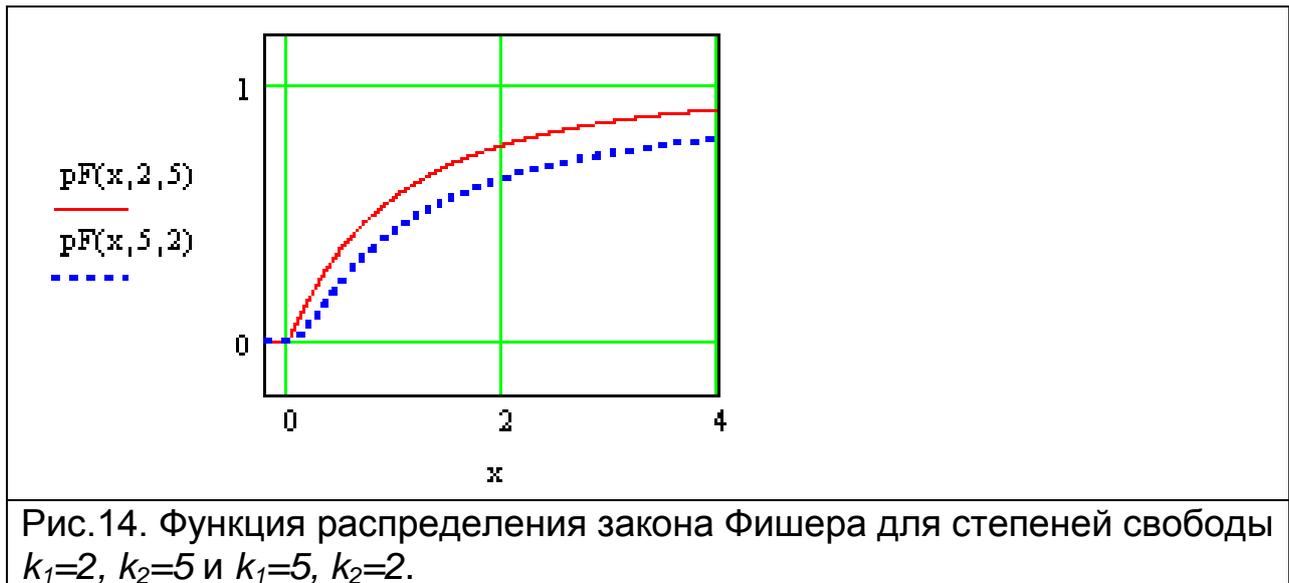


Рис. 14. Функция распределения закона Фишера для степеней свободы $k_1=2$, $k_2=5$ и $k_1=5$, $k_2=2$.

Функция распределения Фишера табулирована. Таблица распределения Фишера имеет три входа – числа степеней свободы k_1 , k_2 и уровень значимости α . На пересечении их значений и находится значение $F_{кр.} = F_{табл}$ которое удовлетворяет условию:

$$P(F \leq F_{кр.}) = 1 - \alpha$$

С уменьшением уровня значимости значение $F_{кр.}$ увеличивается.

Выводы

1. Для построения доверительных интервалов, проверки соответствия эмпирического распределения некоторой теоретической зависимости, построения других распределений используют хи квадрат распределение.

Хи квадрат распределением с $k=n$ степенями свободы называют распределение суммы квадратов независимых, нормально распределенных случайных величин с математическим ожиданием, равным нулю и единичными дисперсиями.

Распределение хи-квадрат полностью определяется числом степеней свободы и не зависит от других параметров.

Для хи квадрат распределения число степеней свободы равно числу независимых слагаемых в сумме квадратов случайных величин.

Если на слагаемые наложено l связей, то число степеней свободы равно $n-l$.

Плотность вероятности распределения имеет вид:

$$f(x, k) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \frac{x^{\frac{k}{2}-1} \cdot e^{-\frac{x}{2}}}{2^{\frac{k}{2}} \cdot \Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}, & x > 0. \end{cases} \text{ Здесь } \Gamma(z) = \int_0^{\infty} z^{t-1} e^{-t} dt$$

Плотность распределения для $k=1$ и $k=2$ монотонна, а при $k>2$ одновершинная и несимметрична.

Распределение является асимптотически нормальным, то есть при $n \rightarrow \infty$ хи-распределение приближается к нормальному.

Математическое ожидание

$$M[\chi^2] = k$$

Дисперсия

$$D[\chi^2] = 2 \cdot k$$

Теорема разложения. Если $\chi^2_1, \chi^2_2, \chi^2_3, \dots, \chi^2_n$ - независимые случайные величины, имеющие распределение χ^2 с $k_1, k_2, k_3, \dots, k_n$ степенями свободы соответственно, то сумма этих случайных величин имеет распределение χ^2 с $k_1 + k_2 + k_3 + \dots + k_n$ степенями свободы. Верно также и обратное утверждение.

2. Для построения доверительных интервалов используется распределение Стьюдента или t-распределение.

Опр. Распределением Стьюдента называется распределение, получаемое для случайной величины образованной отношением нормированной величины к квадратному корню из частного от деления независимой случайной величины, распределенной по закону "хи квадрат" к величине степени свободы этой величины.

Случайная величина распределения Стьюдента имеет вид:

$$X(k) = \frac{Y}{\sqrt{\frac{Z}{k}}}$$

Плотность вероятности распределения Стьюдента :

$$f(x, k) = \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right) \sqrt{\pi k}} \left(1 + \frac{x^2}{k}\right)^{-\frac{k+1}{2}}$$

Распределение Стьюдента определяется числом степеней свободы k , является симметричным, одновершинным и асимптотически нормальным. При $k>30$ оно практически совпадает с нормальным распределением.

Математическое ожидание

$$M[X, k] = 0$$

Дисперсия

$$D[X, k] = \frac{k}{k-2}, \quad k > 2$$

Таблица распределения Стьюдента имеет два входа – число степеней свободы k и уровень значимости α . На пересечении их значений и находится значение $t_{\text{табл.}}$, которое удовлетворяет условию:

$$P(|t| \leq t_{\text{табл.}}) = \int_{-t_{\text{табл.}}}^{t_{\text{табл.}}} f(t, k) dt = 1 - \alpha$$

3. При анализе выборочных данных, полученных из нормальной генеральной совокупности используют распределение Фишера.

Опр. Распределением Фишера называется распределение, получаемое для случайной величины равной отношению двух независимых случайных величин, распределенных по закону “хи квадрат” с соответственно k_1 , k_2 степенями свободы.

Случайная величина распределения Фишера записывается в виде:

$$X(k_1, k_2) = \frac{Y/k_1}{Z/k_2}$$

Плотность вероятности распределения Фишера:

$$f(x, k_1, k_2) = \frac{\Gamma\left(\frac{k_1 + k_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k_1}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{k_2}{2}\right)} \left(\frac{k_1}{k_2}\right)^{\frac{k_1}{2}} \frac{x^{\frac{k_1}{2}-1}}{\left(1 + \frac{k_1}{k_2} x\right)^{\frac{k_1+k_2}{2}}}, \quad x > 0$$

Таблица распределения Фишера имеет три входа – числа степеней свободы k_1 , k_2 и уровень значимости α . На пересечении их значений и находится значение $F_{\text{кр.}} = F_{\text{табл}}$ которое удовлетворяет условию:

$$P(F \leq F_{\text{кр.}}) = 1 - \alpha$$

Вопросы

1. Где используют хи квадрат распределение?
2. Какое распределение называют хи квадрат распределением с $k=n$ степенями свободы?
3. Чем определяется хи-квадрат распределение?
4. Чему равно число степеней свободы для хи-квадрат распределение?
5. Чему равно число степеней свободы, если на слагаемые наложено l связей?
6. Какой является плотность распределения для $k=1$ и $k=2$?
7. Какой является плотность распределения при $k>2$?

8. Каким является хи-распределение при $n \rightarrow \infty$?
9. Чему равно математическое ожидание хи-распределения?
10. Чему равна дисперсия хи-распределения?
11. Как читается теорема разложения?
12. Верно ли обратное утверждение теоремы разложения?
13. Где используется распределение Стьюдента или t-распределение?
14. Дайте определение распределению Стьюдента.
15. Какой вид имеет случайная величина распределения Стьюдента?
16. Чему равняется плотность вероятности распределения Стьюдента?
17. Чем определяется распределение Стьюдента?
18. Каким является распределение Стьюдента?
19. Каким является распределение Стьюдента при $k > 30$?
20. Чему равно математическое ожидание распределение Стьюдента?
21. Чему равна дисперсия распределение Стьюдента?
22. Как построена таблица распределения Стьюдента?
23. Какому условию удовлетворяет значение $t_{\text{табл}}$ из таблицы распределения Стьюдента?
24. Где используется распределение Фишера?
25. Дайте определение распределению Фишера?
26. Как записывается случайная величина распределения Фишера?
27. Как записывается записывается плотность вероятности распределения Фишера?
28. Как построена таблица распределения Фишера?
29. Какому условию удовлетворяет значение $F_{\text{кр.}} = F_{\text{табл}}$ из таблица распределения Фишера ?

Планирование эксперимента

Тема 10

Интервальные оценки.

Точечная оценка математического ожидания, дисперсии при известном математическом ожидании, дисперсии при неизвестном математическом ожидании является случайной величиной и при небольших объемах выборки (< 30), может значительно отличаться от оцениваемого параметра.

Опр. **Интервальной** называют оценку, которая определяется двумя числами – концами интервалов.

Интервальная оценка устанавливает точность и надежность оценок.

Опр. **Уровень значимости** – достаточно малая вероятность, при которой событие можно считать практически невозможным (Обозначают α).

На практике принимают уровень значимости равным 0.01 .. 0.05.

Пусть найденная по данным выборки точечная оценка \bar{y} служит оценкой неизвестного параметра y . Абсолютная погрешность такой оценки может быть записана как $|y - \bar{y}| < y^*$.

Опр. **Надежностью (доверительной вероятностью)** оценки \bar{y} по y называют вероятность $P_{\text{дог}}$, с которой выполняется неравенство $|y - \bar{y}| < y^*$.

Доверительная вероятность обычно записывается через уровень значимости: $P_{\text{дог}} = 1 - \alpha$.

Если вероятность $|y - \bar{y}| < y^*$ равна $P_{\text{дог}}$, то можно записать:

$$P(|y - \bar{y}| < y^*) = P_{\text{дог}} \text{ или } P(\bar{y} - y^* < y < \bar{y} + y^*) = P_{\text{дог}}.$$

Это значит, что вероятность того, что интервал $(\bar{y} - y^*, \bar{y} + y^*)$ включает в себе неизвестный параметр y , равна $P_{\text{дог}}$.

Опр. **Доверительным** называют интервал $(\bar{y} - y^*, \bar{y} + y^*)$, который покрывает неизвестный параметр с заданной надежностью $P_{\text{дог}}$.

Опр. Границы интервала $y_n = \bar{y} - y^*$, $y_e = \bar{y} + y^*$ – называют нижней и верхней доверительными границами.

Интервальные оценки $M[X]$ нормального распределения при известном σ .

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. Пусть количественный параметр X генеральной совокупности распределен нормально с известным среднеквадратическим отклонением σ . Оценить неизвестное математическое ожидание $M[X] = a$ по выборочной средней \bar{x} . Найти доверительные интервалы, покрывающие параметр a с надежностью $P_{\text{дог}}$.

Выборочная средняя \bar{x} является случайной величиной выборки \bar{X} (изменяется от выборки к выборке).

Утверждение. Если случайная величина X распределена нормально, то выборочная средняя \bar{X} , найденная по независимым наблюдениям, также распределена нормально. Тогда параметры распределения \bar{X} равны:

$$M[\bar{X}] = a, \sigma[\bar{X}] = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

Для выполнения соотношения $P(|\bar{X} - a| < a^*) = P_{\text{дог}}$, используя выражение:

$$P(|X - a| < \delta) = 2\Phi(\delta/\sigma)$$

можно записать:

$$P(|\bar{X} - a| < a^*) = 2\Phi\left(\frac{a^* \sqrt{n}}{\sigma}\right) = 2\Phi(t), \text{ где } t = \frac{a^* \sqrt{n}}{\sigma}$$

Напоминание. Функция Лапласа:

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_0^x e^{-z^2/2} dz.$$

Из равенства $t = \frac{a^* \sqrt{n}}{\sigma}$ следует $a^* = \frac{t \cdot \sigma}{\sqrt{n}}$. Тогда можно записать:

$$P(|\bar{X} - a| < \frac{t \cdot \sigma}{\sqrt{n}}) = 2\Phi(t).$$

Следовательно, для выборочной средней \bar{x} :

$$P(\bar{x} - \frac{t \cdot \sigma}{\sqrt{n}} < a < \bar{x} + \frac{t \cdot \sigma}{\sqrt{n}}) = 2\Phi(t) = P_{\text{довер.}}$$

Смысл выражения: с надежностью $P_{\text{довер}}$ можно утверждать, что доверительный интервал $(\bar{x} - \frac{t \cdot \sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + \frac{t \cdot \sigma}{\sqrt{n}})$ покрывает неизвестный па-

раметр a . При этом точность оценки $a^* = \frac{t \cdot \sigma}{\sqrt{n}}$.

Замечание 1. Число t определяется из равенства $2\Phi(t) = P_{\text{довер}}$, или $\Phi(t) = P_{\text{довер}}/2$. По таблице функции Лапласа находят аргумент t , которому соответствует значение функции Лапласа, равное $P_{\text{довер}}/2$.

Замечание 2. Оценку $|\bar{x} - a| < \frac{t \cdot \sigma}{\sqrt{n}}$ называют классической.

Замечание 3. Из формулы $a^* = \frac{t \cdot \sigma}{\sqrt{n}}$ следует:

- 1) при возрастании объема выборки n точность оценки увеличивается;
- 2) увеличение надежности оценки $P_{\text{довер}}$ приводит к увеличению t (функция $2\Phi(t)$ возрастающая), следовательно и к возрастанию a^* ; увеличение надежности классической оценки влечет за собой уменьшение ее точности.

Интервальные оценки $M[X]$ нормального распределения при неизвестном σ .

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. Пусть количественный параметр X генеральной совокупности распределен нормально, причем среднеквадратическое отклонение σ неизвестно. Оценить неизвестное математическое ожидание $M[X] = a$ с помощью доверительных интервалов.

Если Z – нормальная величина с $N(0, 1)$, а Y – независимая от Z величина распределенная по закону χ^2 с k степенями свободы, то величина:

$$T = \frac{Z}{\sqrt{Y/k}}$$

распределена по закону Стьюдента с k степенями свободы.

Пусть числовой признак X генеральной совокупности распределен нормально ($M[X]=a$, $\sigma[X]=\sigma$). Для выборки объема n из этой совокупности выборочная средняя \bar{X} также распределена нормально и параметры распределения \bar{X} равны:

$$M[\bar{X}_g]=a, \sigma[\bar{X}_g]=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

Тогда случайная величина:

$$Z = \frac{\bar{X}_g - a}{\sigma\sqrt{n}}$$

также имеет нормальное распределение как линейная функция нормального аргумента \bar{X}_g , причем $M[Z]=0$, $\sigma[Z]=1$. Доказано, что слу-

чайные величины Z и $Y = \frac{(n-1) \cdot \bar{D}_x}{\sigma^2}$ независимы и величина Y распре-

делена по закону χ^2 с $k = n-1$ степенями свободы.

Напоминание. Несмещенная оценка:

$$\bar{D}_x = \frac{n}{n-1} \bar{D}_x^* = \bar{\sigma}_x^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

называется несмещенной дисперсией или **исправленной** дисперсией.

Подставив $Z = \frac{\bar{X}_g - a}{\sigma\sqrt{n}}$ и $Y = \frac{(n-1) \cdot \bar{D}_x}{\sigma^2}$ в $T = \frac{Z}{\sqrt{Y/k}}$ получим величину:

$$T = \frac{(\bar{x}_g - a) \cdot \sqrt{n}}{\sqrt{\bar{D}_x}},$$

которая распределена по закону Стьюдента с $k=n-1$ степенями свободы.

Следовательно, по данным выборки заданной задачи можно построить случайную величину T , которая распределена по Стьюденту с k степенями свободы.

Плотность распределения Стьюдента для переменной t :

$$f(t, k) = \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)\sqrt{\pi k}} \left(1 + \frac{t^2}{k}\right)^{-\frac{k+1}{2}}$$

Вывод: распределение Стьюдента определяется объемом выборки n и не зависит от неизвестных параметров a и σ . Так как $f(t, k)$ четная функция от t , вероятность осуществления неравенства:

$$\left| \frac{(\bar{x}_g - a) \cdot \sqrt{n}}{\sqrt{\bar{D}_x}} \right| < P_{\text{дог}}$$

определяется следующим образом.

$$P\left(\left|\frac{(\bar{x}_e - a) \cdot \sqrt{n}}{\sqrt{D_x}}\right| < t_{\text{дог}}\right) = 2 \cdot \int_0^{t_{\text{дог}}} f(t, k) dt = P_{\text{дог}}.$$

Следовательно:

$$P\left(\bar{X} - \frac{t_{\text{дог}} \cdot \sqrt{D_x}}{\sqrt{n}} < a < \bar{X} + \frac{t_{\text{дог}} \cdot \sqrt{D_x}}{\sqrt{n}}\right) = P_{\text{дог}}.$$

Замечание. Для малых выборок ($n < 30$) распределение Стьюдента дает не вполне определенные результаты.

Выводы

Интервальной называют оценку, которая определяется двумя числами – концами интервалов.

Уровень значимости – достаточно малая вероятность, при которой событие можно считать практически невозможным (Обозначают α). На практике принимают уровень значимости равным 0.01 .. 0.05.

Надежностью (доверительной вероятностью) оценки \bar{y} по y называют вероятность $P_{\text{дог}}$, с которой выполняется неравенство $|y - \bar{y}| < y^*$.

Запись доверительной вероятности: $P_{\text{дог}} = 1 - \alpha$.

Доверительным называют интервал $(\bar{y} - y^*, \bar{y} + y^*)$, который покрывает неизвестный параметр с заданной надежностью $P_{\text{дог}}$.

Границы интервала $y_H = \bar{y} - y^*$, $y_B = \bar{y} + y^*$ – называют нижней и верхней доверительными границами.

Утверждение. Если случайная величина X распределена нормально, то выборочная средняя \bar{X} , найденная по независимым наблюдениям, также распределена нормально.

Для выполнения соотношения $P(|\bar{X} - a| < a^*) = P_{\text{дог}}$, используя выражение:

$$P(|X - a| < \delta) = 2\Phi(\delta/\sigma)$$

можно записать:

$$P(|\bar{X} - a| < a^*) = 2\Phi\left(\frac{a^* \sqrt{n}}{\sigma}\right) = 2\Phi(t), \text{ где } t = \frac{a^* \sqrt{n}}{\sigma}$$

Функция Лапласа:

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_0^x e^{-z^2/2} dz.$$

Следовательно, для выборочной средней \bar{x} :

$$P\left(\bar{x} - \frac{t \cdot \sigma}{\sqrt{n}} < a < \bar{x} + \frac{t \cdot \sigma}{\sqrt{n}}\right) = 2\Phi(t) = P_{\text{дог}}.$$

То есть с надежностью $P_{\text{дог}}$ доверительный интервал $(\bar{x} - \frac{t \cdot \sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + \frac{t \cdot \sigma}{\sqrt{n}})$ покрывает неизвестный параметр a . Точность оценки $a^* = \frac{t \cdot \sigma}{\sqrt{n}}$.

Оценку $|\bar{x} - a| < \frac{t \cdot \sigma}{\sqrt{n}}$ называют классической.

При возрастании объема выборки n точность оценки увеличивается. Увеличение надежности классической оценки влечет за собой уменьшение ее точности.

Если Z – нормальная величина с $N(0, 1)$, а Y – независимая от Z величина распределенная по закону χ^2 с k степенями свободы, то величина:

$$T = \frac{Z}{\sqrt{Y/k}}$$

распределена по закону Стьюдента с k степенями свободы.

Так как распределение Стьюдента определяется объемом выборки n и не зависит от неизвестных параметров a и σ , то приведенную величину можно представить в виде:

$$T = \frac{(\bar{x}_g - a) \cdot \sqrt{n}}{\sqrt{D_x}},$$

которая распределена по закону Стьюдента с $k=n-1$ степенями свободы.

Так как $f(t, k)$ четная функция от t , вероятность осуществления неравенства:

$$\left| \frac{(\bar{x}_g - a) \cdot \sqrt{n}}{\sqrt{D_x}} \right| < P_{\text{дог}}$$

определяется следующим образом.

$$P \left(\left| \frac{(\bar{x}_g - a) \cdot \sqrt{n}}{\sqrt{D_x}} \right| < t_{\text{дог}} \right) = 2 \cdot \int_0^{t_{\text{дог}}} f(t, k) dt = P_{\text{дог}}.$$

Следовательно доверительный интервал $\left(\bar{x} - \frac{t_{\text{дог}} \cdot \sqrt{D_x}}{\sqrt{n}}, \bar{x} + \frac{t_{\text{дог}} \cdot \sqrt{D_x}}{\sqrt{n}} \right)$,

покрывает неизвестный параметр a с надежностью $P_{\text{дог}}$.

Замечание. Для малых выборок ($n < 30$) распределение Стьюдента дает не вполне определенные результаты.

Вопросы

1. Что называют интервальной оценкой

2. Что такое уровень значимости
3. Какой уровень значимости применяют на практике
4. Что называют надежностью или доверительной вероятностью
5. Как записывается доверительная вероятность
6. Что такое доверительный интервал
7. Как называют границы доверительного интервала
8. Как распределена выборочная средняя \bar{X} , найденная по независимым наблюдениям случайной величины X распределенной нормально
9. Какое используют выражение для выполнения соотношения $P(|\bar{X} - a| < a^*) = P_{довер}$
10. Что такое функция Лапласа
11. Как записывается доверительный интервал покрывающий неизвестный параметр a при известном σ
12. Как записывается точность оценки
13. Как называют оценку $|\bar{x} - a| < \frac{t \cdot \sigma}{\sqrt{n}}$
14. Как ведет себя точность оценки при возрастании объема выборки n
15. К чему приводит увеличение надежности классической оценки
16. Какая случайная величина распределена по закону Стьюдента
17. От чего независит распределение Стьюдента
18. Как можно представить случайную величину распределенную по закону Стьюдента
19. Как записывается доверительный интервал покрывающий неизвестный параметр a при неизвестном σ
20. В чем заключается недостаток распределения Стьюдента.

Планирование эксперимента

Тема 11

Проверка статистических гипотез.

Статистическая гипотеза.

Опр. **Статистическая гипотеза** – любое предположение о виде неизвестного распределения, или о параметрах известного распределения одной или нескольких случайных величин.

Эти предположения можно проверить статистически, используя результаты наблюдений, образующих случайную выборку.

В теории проверки гипотез выдвигается одна основная, так называемая нулевая гипотеза H_0 , и одна конкурирующая (альтернативная) гипотеза H_1 .

Опр. **Нулевой** (основной) называют выдвинутую гипотезу H_0 .

Опр. **Конкурирующей (альтернативной)** называют гипотезу H_1 , которая противоречит основной.

ПРИМЕР. Если нулевая гипотеза состоит в том, что математическое ожидание a нормального распределения равно 5, то альтернативная гипотеза может состоять в предположении, что $a \neq 5$. Это записывают так: $H_0 : a = 5$; $H_1 : a \neq 5$

Опр. **Простой** называется гипотеза, содержащая только одно предположение.

Опр. **Сложной** называют гипотезу, которая состоит из конечного или бесконечного числа гипотез.

ПРИМЕР. 1. Параметр показательного распределения равен 5. $H_0 : \lambda = 5$. Это простая гипотеза.

2. Математическое ожидание нормального распределения равно 5, дисперсия известна. $H_0 : a = 5$. Это простая гипотеза.

3. Математическое ожидание нормального распределения равно 5, дисперсия неизвестна. $H_0 : a = 5$. Это сложная гипотеза.

4. Параметр показательного распределения больше 5. $H_0 : \lambda > 5$. Это сложная гипотеза, так как она состоит из множества простых вида $H_{0i} : \lambda_i > C_i$, где C_i - любое число.

Статистическая проверка.

Выдвинутая гипотеза может быть правильной или неправильной, поэтому возникает необходимость ее проверки. Так как проверку проводят статистическими методами, ее называют **статистической проверкой**.

Если результаты проверки показывают, что выдвинутая гипотеза правильная, то это еще не значит, что она будет подтверждаться данными повторных выборок. Иначе говоря, никакие экспериментальные данные не могут ни полностью подтвердить, ни полностью опровергнуть выдвинутую статистическую гипотезу. Всегда остается какой-то риск неправильности решения. В этом и состоит отличие научной гипотезы от статистической.

В итоге статистической проверки могут быть приняты и неправильные решения. Поэтому различают два вида ошибок.

Опр. **Ошибка первого рода** состоит в том, что будет отвергнута правильная гипотеза.

Опр. **Ошибка второго рода** состоит в том, что будет принята неправильная гипотеза.

ЗАМЕЧАНИЕ. 1. В итоге статистической проверки правильное решение может быть принято в двух случаях:

- гипотеза принимается и в действительности она правильная;
- гипотеза отвергается и в действительности она не верна.

При постоянном объеме выборки и точности измерений уменьшение вероятности ошибки первого рода приводит к увеличению вероятности ошибки второго рода.

Вероятность совершить ошибку первого рода принято обозначать через α . Эту вероятность называют уровнем значимости.

Опр. **Уровнем значимости** называют вероятность α , с которой может быть совершена ошибка первого рода.

Наиболее часто уровень значимости принимают равной 0.05 или 0.01. Если принять $\alpha = 0.05$, то это означает, что в пяти случаях из ста имеется риск отвергнуть правильную гипотезу (допустить ошибку первого рода).

В нестандартных ситуациях задача задания α определяется анализом ущерба, который порождается ошибками первого и второго рода.

Если принят уровень значимости равным α , то надежность вывода равна: $P = 1 - \alpha$.

Если функция распределения задана отдельными параметрами, и гипотеза строится именно по этим неизвестным параметрам, то говорят о **параметрических** гипотезах. В противоположность этому статистические гипотезы общего характера называются **непараметрическими**.

Для проверки нулевой гипотезы используют специально подобранную случайную величину, точное или приближенное распределение которой известно.

Статистический критерий.

Опр. **Статистическим критерием** (или просто критерием) называют случайную величину, которая служит для проверки нулевой гипотезы. В зависимости от вида распределения выбранной случайной величины в качестве статистического параметра статистический критерий обозначают:

U или Z – если выбранная статистическая величина распределена нормально;

F или F^2 – если выбранная статистическая величина распределена по закону Фишера;

T – если выбранная статистическая величина распределена по закону Стьюдента;

χ^2 – если выбранная статистическая величина распределена по закону “хи” – квадрат и т.д.

Множество всех возможных значений критерия разбивается на три области:

первая – неправдоподобно малых значений;

вторая – естественных (или вероятных) значений;

третья – неправдоподобно больших значений.

Вторая область является областью принятия гипотезы. Первая и третья составляют критическую область. Если рассчитанная по данным выборки статистика попадает в критическую область, то гипотеза H_0 отклоняется.

Виды гипотез

Все виды задач, решаемые с помощью теории гипотез, можно разделить на четыре группы:

Первая группа. Проверка случайности, независимости и однородности результатов измерений.

Вторая группа. Проверка средних значений и дисперсий для результатов измерений нормально распределенных случайных величин.

Третья группа. Проверка гипотез о наличии линейной и множественной корреляции и регрессии.

Четвертая группа. Объединенные различные по характеру задачи.

Эти группы можно представить следующими гипотезами:

Первая группа. Проверка случайности, независимости и однородности результатов измерений.

1.1. О случайности и независимости результатов.

1.2. Об однородности результатов.

Вторая группа. Проверка средних значений и дисперсий для результатов измерений нормально распределенных случайных величин.

2.1. О среднем значении.

2.2. О средних значениях двух совокупностей.

2.3. О дисперсии.

2.4. О дисперсии двух совокупностей.

Третья группа. Проверка гипотез о наличии линейной и множественной корреляции и регрессии.

3.1. О линейной корреляции.

3.2. О линейной регрессии.

3.4. О множественной корреляции.

3.5. О множественной регрессии.

Четвертая группа. Объединенные различные по характеру задачи.

4.1. О нормальном виде закона распределения.

4.2. О резко выделяющихся результатах.

4.3. О вероятности P альтернативных генеральных совокупностях.

4.4. О вероятностях P_1 и P_2 альтернативных генеральных совокупностях.

Проверка гипотез.

Алгоритм проверки приведенных гипотез можно представить в следующем виде:

1. Выдвигают предположение (гипотезу) H_0 .
 2. Задают величину уровня значимости α .
 3. Задают некоторую функцию от результатов наблюдения (критическую статистику) $\gamma(n) = \gamma(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$. Функция $\gamma(n)$, как и всякая функция от результатов наблюдения, сама является случайной величиной и в предположении о справедливости гипотезы H_0 подчинена некоторому хорошо изученному (обычно заданному в форме таблицы) закону распределения с плотностью $f_\gamma(x)$.
 3. Из таблицы этого распределения находят $100(1-\alpha/2)$ -процентную и $100(\alpha/2)$ -процентную точки $\gamma_{\alpha/2}^{(мин)}$ и $\gamma_{\alpha/2}^{(макс)}$, разделяющие всю область мыслимых значений случайной величины $\gamma(n)$ на три части: первая – область неправдоподобно малых значений; вторая – естественных (или вероятных) значений; третья – область неправдоподобно больших значений.
- В тех случаях, когда основную опасность для нашего утверждения представляют только односторонние отклонения, то есть слишком маленькие или слишком большие значения критической статистики $\gamma(n)$, находят лишь одну точку: либо $100(1-\alpha)$ -процентную точку $\gamma_\alpha^{(мин)}$, либо 100α - процентную точку.
5. В функцию $\gamma(n)$ подставляют имеющиеся конкретные выборочные значения и подсчитывают ее численное значение. Если окажется, что это значение принадлежит области вероятных значений $\gamma(n)$, то гипотеза H_0 с вероятностью $1 - \alpha$ считается не противоречащей данным наблюдения. В противном случае (если $\gamma(n)$ слишком мало или слишком велико) делают вывод, что $\gamma(n)$ на самом деле не подчиняется закону $f_\gamma(x)$ (вероятность ошибки этого вывода равна α), следовательно, гипотеза H_0 является несостоятельной.

ВЫВОДЫ

Опр. **Статистическая гипотеза** – любое предположение о виде неизвестного распределения, или о параметрах известного распределения одной или нескольких случайных величин.

Опр. **Нулевой** (основной) называют выдвинутую гипотезу H_0 .

Опр. **Конкурирующей (альтернативной)** называют гипотезу H_1 , которая противоречит основной.

Опр. **Простой** называется гипотеза, содержащая только одно предположение.

Опр. **Сложной** называют гипотезу, которая состоит из конечного или бесконечного числа гипотез.

Проверку правильности статистических гипотез проводят статистическими методами и такую проверку называют **статистической проверкой**.

Опр. **Ошибка первого рода** состоит в том, что будет отвергнута правильная гипотеза.

Опр. **Ошибка второго рода** состоит в том, что будет принята неправильная гипотеза.

Правильное решение может быть принято в двух случаях:

- гипотеза принимается и в действительности она правильная;
- гипотеза отвергается и в действительности она не верна.

Опр. **Уровнем значимости** называют вероятность α , с которой может быть совершена ошибка первого рода.

Надежность принятия гипотезы равна: $P = 1 - \alpha$.

Если функция распределения задана отдельными параметрами, и гипотеза строится именно по этим неизвестным параметрам, то говорят о **параметрических** гипотезах. В противоположность этому статистические гипотезы общего характера называются **непараметрическими**.

Опр. **Статистическим критерием** (или просто критерием) называют случайную величину, которая служит для проверки нулевой гипотезы. Множество всех возможных значений критерия разбивается на три области:

- первая – неправдоподобно малых значений;
- вторая – естественных (или вероятных) значений. Это область принятия гипотезы;
- третья – неправдоподобно больших значений.

Первая и третья составляют критическую область. Если рассчитанная по данным выборки статистика попадает в критическую область, то гипотеза H_0 отклоняется.

Виды задач, решаемые с помощью теории гипотез:

Первая группа. Проверка случайности, независимости и однородности результатов измерений.

Вторая группа. Проверка средних значений и дисперсий для результатов измерений нормально распределенных случайных величин.

Третья группа. Проверка гипотез о наличии линейной и множественной корреляции и регрессии.

Четвертая группа. Объединенные различные по характеру задачи.

Алгоритм проверки гипотез:

1. Выдвигают предположение (гипотезу) H_0 .
2. Задают величину уровня значимости α .
3. Задают некоторую функцию от результатов наблюдения (критическую статистику) $\gamma(n) = \gamma(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$.
3. Из таблицы закона распределения плотности вероятности принятой функции $\gamma(n)$ в предположении справедливости гипотезы H_0 находят $100(1-\alpha/2)$ -процентную и $100(\alpha/2)$ -процентную точки, разделяющие всю область мыслимых значений случайной величины $\gamma(n)$ на области вероятностных значений и неправдоподобных значений.

5. В функцию $\gamma(n)$ подставляют имеющиеся конкретные выборочные значения и подсчитывают ее численное значение. Если это значение принадлежит области вероятных значений $\gamma(n)$, то гипотеза H с вероятностью $1 - \alpha$ считается не противоречащей данным наблюдения.

ВОПРОСЫ

1. Что такое статистическая гипотеза?
2. Какую гипотезу называют нулевой?
3. Какую гипотезу называют альтернативной?
4. Какую гипотезу называют простой?
5. Какую гипотезу называют сложной?
6. Какую гипотезу называют нулевой?
7. Какими методами проверку правильности статистических гипотез?
8. Что такое ошибка первого рода?
9. Что такое ошибка второго рода?
10. Что такое уровень значимости?
11. Чему равна надежность принятия гипотезы?
12. Что такое параметрическая гипотеза?
13. Что такое непараметрическая гипотеза?
14. Что такое статистический критерий?
15. На какие области можно разбить множество всех возможных значений статистического критерия?
16. Какие виды задач решаются с помощью теории гипотез?

Планирование эксперимента

Тема 12

Регрессионный анализ.

Система двух случайных величин.

Опр. Случайные величины, значение которых определяются двумя числами – называются двумерными случайными величинами.

Обозначение: (X, Y) .

X, Y – называют составляющими компонентами.

Компоненты могут быть представлены:

- дискретными случайными величинами;
- непрерывными случайными величинами.

Опр. Законом распределения вероятностей дискретной двумерной случайной величины называют перечень возможных значений этой величины, т.е. пару числе (x_i, y_j) и их вероятности $P(x_i, y_j)$.

Опр. Функцией распределения двумерной случайной величины (X, Y) называют функцию $F(x, y)$, определяющую для каждой пары чисел x, y вероятность того, что X примет значение меньше x , и при этом Y примет значение меньше y :

$$F(x, y) = P(X < x, Y < y).$$

Опр. Плотностью совместного распределения вероятностей $f(x, y)$ двумерной непрерывной случайной величины (X, Y) называют вторую смешанную частную производную от функции распределения:

$$f(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y}$$

Функция распределения связана с плотностью распределения соотношением:

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(x, y) dx dy$$

Коэффициент корреляции.

Опр. Корреляционным моментом μ_{xy} случайных величин X и Y называют математическое ожидание произведения отклонений этих величин

$$\mu_{xy} = M\{[X - M(X)][Y - M(Y)]\}$$

Для дискретных величин это можно записать как:

$$\mu_{xy} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (x_i - M(X))(y_j - M(Y)) \cdot p(x_i, y_j)$$

Для непрерывных величин:

$$\mu_{xy} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - M(X))(y - M(Y)) f(x, y) dx dy$$

Корреляционный момент μ_{xy} характеризует связь между случайными величинами X и Y .

Утверждение. Корреляционный момент двух независимых величин X и Y равен нулю.

Недостаток использования корреляционного момента μ_{xy} заключается в том, что он связан с размерностью.

Опр. Коэффициентом корреляции k_{xy} случайных величин X и Y называют отношение корреляционного момента к произведению среднеквадратичных отклонений этих величин:

$$k_{xy} = \frac{\mu_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}$$

В этом случае коэффициент корреляции безразмерная величина.

Замечание. Коэффициент корреляции независимых случайных величин равен нулю ($k_{xy} = 0$)

Запишем величины которые называются нормированными величинами:

$$X' = \frac{X - M(X)}{\sigma_x}, \quad Y' = \frac{Y - M(Y)}{\sigma_y}$$

Их особенности:

-математическое ожидание равно нулю;

-дисперсия равна единице.

Утверждение: коэффициент корреляции k_{xy} равен корреляционному моменту нормированных величин $\mu_{x'y'}$.

Теорема 1. Абсолютная величина корреляционного момента двух случайных величин X и Y не превышает произведение их среднеквадратических отклонений:

$$|\mu_{xy}| \leq \sigma_x \sigma_y$$

Теорема 2. Абсолютная величина коэффициента корреляции не превышает единицы:

$$|k_{xy}| \leq 1$$

Две случайные величины X и Y называются коррелированными, если для них:

$$k_{xy} \neq 0$$

Две случайные величины X и Y называются некоррелированными, если для них:

$$k_{xy} = 0$$

Особенности:

-две коррелированные величины ($k_{xy} \neq 0$) зависимы (обратное утверждение не имеет смысла);

-из независимости X и Y следует их некоррелированность ($k_{xy} = 0$), но из некоррелированности не следует независимость этих величин.

ИСКЛЮЧЕНИЕ. Из некоррелированности ($k_{xy} = 0$) нормально распределенных величин

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-k_{xy}^2}} \exp\left(-\frac{1}{2(1-k_{xy}^2)}\left(\frac{(x-a_1)^2}{2\sigma_x^2} + \frac{(y-a_2)^2}{2\sigma_y^2} - 2k_{xy} \cdot \frac{x-a_1}{\sigma_x} \cdot \frac{y-a_2}{\sigma_y}\right)\right)$$

вытекает их независимость. В этом случае если $k_{xy} = 0$, то

$$f(x, y) = f_1(x) \cdot f_2(y).$$

Линейная регрессия.

Пусть X и Y зависимые случайные величины. Введем приближенную запись их как:

$$Y \approx g(x) = a_0 + a_1 X$$

Такое приближение будет наилучшим, если

$$M[Y - g(x)]^2 \rightarrow \min$$

Подобранная функция $g(x)$ при приведенном условии называется среднеквадратической регрессией Y на X . В этом случае составляется функция:

$$S(a_0, a_1) = M[Y - g(x)]^2$$

и рассматривается:

$$\frac{\partial S}{\partial a_0} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial a_1} = 0$$

Утверждение. Линейная среднеквадратическая регрессия имеет вид

$$g(x) = m_y + k_{xy} \frac{\sigma_y}{\sigma_x} (x - m_x)$$

Называют

$$k_{xy} \frac{\sigma_y}{\sigma_x} - \text{коэффициентом регрессии } Y \text{ на } X$$

Особенность. Если двумерная величина (X, Y) распределена нормально, то X и Y связаны линейной корреляционной зависимостью

ВЫВОДЫ

Случайные величины, значение которых определяются двумя числами – называются двумерными случайными величинами.

Компоненты могут быть представлены:

- дискретными случайными величинами;
- непрерывными случайными величинами.

Функцией распределения двумерной случайной величины (X, Y) называют функцию $F(x, y)$, определяющую для каждой пары чисел x, y вероятность того, что X примет значение меньше x , и при этом Y примет значение меньше y :

$$F(x, y) = P(X < x, Y < y).$$

Плотностью совместного распределения вероятностей $f(x, y)$ двумерной непрерывной случайной величины (X, Y) называют вторую смешанную частную производную от функции распределения:

$$f(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y}$$

Функция распределения связана с плотностью распределения соотношением:

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(x, y) dx dy$$

Корреляционным моментом μ_{xy} случайных величин X и Y называют математическое ожидание произведения отклонений этих величин

$$\mu_{xy} = M\{[X - M(X)][Y - M(Y)]\}$$

Коэффициентом корреляции k_{xy} случайных величин X и Y называют отношение корреляционного момента к произведению среднеквадратичных отклонений этих величин:

$$k_{xy} = \frac{\mu_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}$$

Коэффициент корреляции независимых случайных величин равен нулю ($k_{xy}=0$)

Теорема 1. Абсолютная величина корреляционного момента двух случайных величин X и Y не превышает произведение их среднеквадратических отклонений:

$$|\mu_{xy}| \leq \sigma_x \sigma_y$$

Теорема 2. Абсолютная величина коэффициента корреляции не превышает единицы:

$$|k_{xy}| \leq 1$$

Две случайные величины X и Y называются коррелированными, если для них:

$$k_{xy} \neq 0$$

Две случайные величины X и Y называются некоррелированными, если для них:

$$k_{xy} = 0$$

-из независимости X и Y следует их некоррелированность ($k_{xy}=0$), но из некоррелированности не следует независимость этих величин.

Некоррелированные ($k_{xy}=0$) нормально распределенные величины независимы.

Подобранная функция $g(x)$ при условии $M[Y-g(x)]^2 \rightarrow \min$, которая связывает зависимые случайные величины X и Y линейно:

$$g(x) = a_0 + a_1 X,$$

называется среднеквадратической регрессией Y на X . В этом случае составляется функция:

$$S(a_0, a_1) = M[Y-g(x)]^2$$

и рассматривается: $\frac{\partial S}{\partial a_0} = 0, \frac{\partial S}{\partial a_1} = 0$

Утверждение. Линейная среднеквадратическая регрессия имеет вид

$$g(x) = m_y + k_{xy} \frac{\sigma_y}{\sigma_x} (x - m_x)$$

Называют

$k_{xy} \frac{\sigma_y}{\sigma_x}$ - коэффициентом регрессии Y на X

Если двумерная величина (X, Y) распределена нормально, то X и Y связаны линейной корреляционной зависимостью

ВОПРОСЫ

1. Что такое двумерные случайные величины.
2. Как могут быть представлены компоненты двумерных случайных величин
3. Что такое функция двумерной случайной величины
4. Что такое плотность распределения вероятности двумерной случайной величины
5. Как связаны между собой функция распределения и плотность вероятности двумерной случайной величины
6. Что такое корреляционный момент двумерной случайной величины.
7. Что такое коэффициент корреляции двумерной случайной величины.
8. Чему равен коэффициент корреляции независимых случайных величин.
9. Как ограничена абсолютная величина корреляционного момента двух случайных величин.
10. Как ограничен коэффициент корреляции двух случайных величин
11. Какие величины называются коррелированными.
12. Какие величины называются некоррелированными.
13. Что такое среднеквадратическая регрессия.
14. Какие условия рассматриваются при построении среднеквадратической линейной регрессии.
15. Что такое коэффициент регрессии
16. Как связаны между собой величины двумерной величины, если они нормально распределены.

Планирование эксперимента

Тема 13

Регрессионный анализ. (продолжение)

В предыдущем теме мы рассмотрели построение среднеквадратической регрессии между двумя зависимыми случайными величинами. Этот подход можно использовать при анализе факторов влияющих на заданную модель, когда между отдельными факторами существует зависимость, определяемая корреляционной связью.

Кроме этого в математической статистике различают непосредственно направление, называемое регрессионным анализом, которое решает вопрос построения регрессионных зависимостей между случайной и неслучайными величинами.

Опр. **Уравнение регрессии** – функциональная зависимость математического ожидания случайной величины Y от одной X или нескольких X_1, X_2, \dots, X_k неслучайных величин, т.е. зависимость вида $M[Y] = \eta = \varphi(X)$ или $\eta = \varphi_k(X_1, X_2, \dots, X_k)$.

Опр. **Регрессионный анализ** – представляет собой последовательность действий обеспечивающих построение уравнения регрессии или регрессионной модели методом наименьших квадратов и анализ полученного уравнения с помощью аппарата математической статистики.

Регрессионный анализ включает в себя:

- операции оценивания неизвестных параметров модели;
- проверки статистической значимости неизвестных параметров;
- проверки адекватности модели;
- построения доверительных областей и т.д.

Видом уравнения регрессии задаются заранее. Для этого предварительно можно исследовать;

- физическую сущность изучаемого явления;
- полученные статистические экспериментальные материалы;
- имеющиеся результаты обзора литературных данных.

Следовательно, непосредственной задачей регрессионного анализа является статистическое оценивание неизвестных параметров постулированной регрессионной модели.

Для отыскания оценок широко применяются метод наименьших квадратов (МНК), который дает наиболее вероятные (максимально правдоподобные) оценки параметров в том случае, когда результаты эксперимента представляют собой выборку из нормального распределения. В этом частном, но распространенном случае МНК совпадает с общим статистическим методом максимального правдоподобия (ММП).

Постановка задачи

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ.

ЗАДАНО (значения получены из эксперимента):

- Y – выходная характеристика;
- X_1, X_2, \dots, X_k – значения параметров факторов.

НАЙТИ:

Найти математическое ожидание функции: $Y=f(X_1, X_2, \dots, X_k)$.

ЗАМЕЧАНИЕ: На значение Y влияют не только значения X_1, X_2, \dots, X_k , но также и неуправляемые факторы, к которым можно отнести погрешности измерения, неконтролируемые факторы и т.д. Поэтому функция $Y = f(X_1, X_2, \dots, X_k)$ представляет собой случайную величину и задача идет о нахождении математического ожидания функции.

Общие рассуждения.

Так как вид функции неизвестен, то математическое ожидание функции выбирают в виде полинома:

$$M(Y) = \beta_0 + \sum_{i=1}^k \beta_i X_i + \sum_{i < j}^k \beta_{ij} X_i X_j + \sum_{i=1}^k \beta_{ii} \cdot X_i^2 + \dots + \varepsilon$$

При этом:

$$\beta_1 = \frac{\partial f}{\partial X_1}; \beta_2 = \frac{\partial f}{\partial X_2}; \dots \beta_{12} = \frac{\partial^2 f}{\partial X_1 \partial X_2}; \dots \beta_{11} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial X_1^2}; \dots \beta_{22} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial X_2^2}.$$

Где β - коэффициенты регрессии;

ε – невязка, учитывающая отклонение экспериментальных результатов от построенного полинома.

По результатам опыта можно найти только выборочные значения X и Y . Это могут быть точечные оценки: \bar{y} , b_0 , b_i , b_{ij} , b_{ii}, \dots . В этом случае уравнение регрессии принимает вид:

$$\bar{y} = b_0 + \sum_{i=1}^k b_i X_i + \sum_{i < j}^k b_{ij} X_i X_j + \sum_{i=1}^k b_{ii} \cdot X_i^2 + \dots$$

Задачей регрессионного анализа и является:

-выбор вида полинома;

-определение и оценка коэффициентов регрессии.

Для упрощения способа нахождения коэффициентов регрессии используют допущения:

1. Результаты наблюдений над величиной Y представляют собой независимые, нормально распределенные случайные величины.

2. Дисперсии $D(y_i)$ равны друг другу или пропорциональны какой-то известной функции.

3. Переменные X_1, X_2, \dots, X_k являются независимыми и изменяются с пренебрежимо малой погрешностью по сравнению с величиной $\sigma(y_i)$.

Для вычисления коэффициентов регрессии может быть использован матричный аппарат.

Уравнение регрессии для линейной модели.

Пусть полином для функции линейный:

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X + \dots + \varepsilon$$

В приведенном уравнении величины β_0 , β_1 и ε неизвестны, при этом величину ε определить практически невозможно, так как она может меняться от эксперимента к эксперименту. Величины β_0 и β_1 являются постоянными для каждого эксперимента и их можно оценить. В этом случае мы получим модель вида:

$$\bar{Y} = b_0 + b_1 X$$

Для определения b_0 , b_1 используется метод наименьших квадратов. Пусть мы имеем n наблюдений:

$$(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \dots, (X_n, Y_n).$$

Тогда уравнение регрессии можно представить в виде:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \dots \varepsilon_i$$

Сумма квадратов невязок равна:

$$S = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^n (Y_i - \beta_0 - \beta_1 \cdot X_i)^2$$

Здесь X_i и Y_i величины, которые заданы. Будем подбирать значения оценок b_0 , b_1 так, чтобы их подстановка вместо β_0 , β_1 в уравнение, давала минимальное значение S . Для этого приравняем нулю частные производные от S по β_0 и β_1 :

$$\frac{\partial S}{\partial \beta_0} = -2 \sum_{i=1}^n (Y_i - \beta_0 - \beta_1 \cdot X_i)$$

$$\frac{\partial S}{\partial \beta_1} = -2 \sum_{i=1}^n X_i \cdot (Y_i - \beta_0 - \beta_1 \cdot X_i)$$

Подставляя вместо β_0 , β_1 значения b_0 , b_1 .

$$\sum_{i=1}^n (Y_i - b_0 - b_1 \cdot X_i) = 0$$

$$\sum_{i=1}^n X_i \cdot (Y_i - b_0 - b_1 \cdot X_i) = 0$$

Откуда

$$\sum_{i=1}^n Y_i - n b_0 - b_1 \cdot \sum_{i=1}^n X_i = 0$$

$$\sum_{i=1}^n X_i \cdot Y_i - b_0 \sum_{i=1}^n X_i - b_1 \cdot \sum_{i=1}^n X_i^2 = 0$$

Или:

$$b_0 n + b_1 \cdot \sum_{i=1}^n X_i = \sum_{i=1}^n Y_i$$

$$b_0 \sum_{i=1}^n X_i + b_1 \cdot \sum_{i=1}^n X_i^2 = \sum_{i=1}^n X_i \cdot Y_i$$

Эти уравнения называются нормальными. Из этих уравнений :

$$b_1 = \frac{\sum X_i Y_i - \frac{(\sum X_i)(\sum Y_i)}{n}}{\sum X_i^2 - \frac{(\sum X_i)^2}{n}} = \frac{\sum (X_i - \bar{X}) \cdot (Y_i - \bar{Y})}{\sum (X_i - \bar{X})^2}$$

где по определению:

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} = \frac{\sum X_i}{n}. \text{ Или } \sum X_i = n \cdot \bar{X}.$$

$$\bar{Y} = \frac{Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n}{n} = \frac{\sum Y_i}{n}. \text{ Или } \sum Y_i = n \cdot \bar{Y}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \sum (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y}) &= \sum X_i Y_i - \bar{X} \sum Y_i - \bar{Y} \sum X_i + n \bar{X} \bar{Y} = \\ \sum X_i Y_i - \bar{X} n \bar{Y} - \bar{Y} n \bar{X} + n \bar{X} \bar{Y} &= \sum X_i Y_i - \bar{X} n \bar{Y} = \sum X_i Y_i - \frac{\sum X_i}{n} \frac{\sum Y_i}{n} = \\ \sum X_i Y_i - \frac{(\sum X_i)(\sum Y_i)}{n} \end{aligned}$$

Если ввести обозначения:

$$S_{XY} = \sum (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})$$

$$S_{XX} = \sum (X_i - \bar{X})^2$$

$$S_{YY} = \sum (Y_i - \bar{Y})^2$$

То решение можно записать в виде:

$$b_1 = \frac{S_{XY}}{S_{XX}}, \quad b_0 = \bar{Y} - b_1 \bar{X} = \frac{\sum Y_i}{n} - \frac{S_{XY}}{S_{XX}} \cdot \frac{\sum X_i}{n}.$$

Это же решение можно представить и следующим образом:

$$b_0 = \frac{\Delta_0}{\Delta}, \quad b_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}.$$

Где:

$$\Delta = \begin{vmatrix} n & \sum X_i \\ \sum X_i & \sum X_i^2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_0 = \begin{vmatrix} \sum Y_i & \sum X_i \\ \sum X_i Y_i & \sum X_i^2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} n & \sum Y_i \\ \sum X_i & \sum X_i Y_i \end{vmatrix}.$$

Точность оценки регрессии

ЗАМЕЧАНИЕ. Под словом адекватность понимают соответствие чему то.

После расчета уравнения регрессии делают проверку соответствия полученного уравнения опытными данными. Говорят, что необходимо провести проверку адекватности модели.

Проверку адекватности полученного уравнения опытными данными проводят по критерию Фишера :

$$F_{набл} = \frac{s_{aq}^2}{s_y^2}.$$

Оценку дисперсий s_{aq}^2 и s_y^2 производят по формулам:

$$s_{aq}^2 = \frac{1}{n-k} \sum_{i=1}^n (Y_i - Y_{pi})^2; \quad s_y^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2; \quad \bar{Y} = \frac{\sum Y_i}{n},$$

где Y_{pi} - расчетное значение величины Y , вычисленное по полученному уравнению регрессии при подстановке в него опытных значений X ; k – количество коэффициентов в уравнении регрессии; $n-k$ – число степеней свободы.

Критерий $F_{набл}$ позволяет, как бы сравнить общий разброс относительно линии регрессии с разбросом в точке. Задавая уровень значимости q , по таблице Фишера для $n-k$ степеней свободы находят значение критерия Фишера F . Если оно больше вычисленного ($F > F_{набл}$), то полученная в виде регрессии модель адекватна результатам эксперимента. Если оно меньше вычисленного ($F < F_{набл}$), то требуется выбрать другой, более сложный вид уравнения.

Следующий этап анализа состоит в проверке значимости коэффициентов. Ее можно осуществить двумя равноценными способами:

- проверкой по критерию Стьюдента;
- построением доверительного интервала.

Определение дисперсии коэффициентов b_0 и b_1 или оценок их дисперсий в общем случае МНК (метода наименьших квадратов) связано с большими выкладками, а иногда и невозможно. Коэффициенты могут быть коррелированными, что еще больше усложняет анализ.

В целях упрощения получения регрессионного уравнения и упрощения его анализа используют некоторые приемы. К ним относится ортогонализация полинома.

Выводы

В математической статистике направление, называемое регрессионным анализом, решает вопрос построения регрессионных зависимостей между случайной и неслучайными величинами.

Уравнение регрессии – функциональная зависимость математического ожидания случайной величины Y от одной X или нескольких X_1, X_2, \dots, X_k неслучайных величин вида: $M[Y] = \eta = \varphi(X)$ или $\eta = \varphi_k(X_1, X_2, \dots, X_k)$.

Регрессионный анализ – последовательность действий обеспечивающих построение уравнения регрессии или регрессионной модели методом наименьших квадратов и анализ полученного уравнения с помощью аппарата математической статистики.

Регрессионный анализ включает в себя:

- операции оценивания неизвестных параметров модели;
- проверки статистической значимости неизвестных параметров;
- проверки адекватности модели;
- построения доверительных областей и т.д.

Вид уравнения регрессии определяется из предварительных исследований.

Когда результаты эксперимента представляют собой выборку из нормального распределения для построения регрессионной модели применяют метод наименьших квадратов (МНК). В этом случае МНК совпадает с общим статистическим методом максимального правдоподобия (ММП).

При нахождении математического ожидания функции: $Y=f(X_1, X_2, \dots, X_k)$ на значение Y влияют не только значения X_1, X_2, \dots, X_k , но также и неуправляемые факторы. Поэтому функция $Y = f(X_1, X_2, \dots, X_k)$ представляет собой случайную величину и задача идет о нахождении математического ожидания функции.

Математическое ожидание функции выбирают в виде полинома:

$$M(Y) = \beta_0 + \sum_{i=1}^k \beta_i X_i + \sum_{i<j}^k \beta_{ij} X_i X_j + \sum_{i=1}^k \beta_{ii} \cdot X_i^2 + \dots \varepsilon$$

При этом:

$$\beta_1 = \frac{\partial f}{\partial X_1}; \beta_2 = \frac{\partial f}{\partial X_2}; \dots \beta_{12} = \frac{\partial^2 f}{\partial X_1 \partial X_2}; \dots \beta_{11} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial X_1^2}; \dots \beta_{22} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial X_2^2}.$$

Где β - коэффициенты регрессии;

ε – невязка, учитывающая отклонение экспериментальных результатов от построенного полинома.

По результатам опыта можно найти только выборочные значения X и Y , по которым строят точечные оценки: \bar{y} , b_0 , b_i , b_{ij} , b_{ii}, \dots . Уравнение регрессии принимает вид:

$$\bar{y} = b_0 + \sum_{i=1}^k b_i x_i + \sum_{i<j}^k b_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^k b_{ii} \cdot x_i^2 + \dots$$

Для упрощения способа нахождения коэффициентов регрессии используют допущения:

1. Результаты наблюдений над величиной Y представляют собой независимые, нормально распределенные случайные величины.

2. Дисперсии $D(y_i)$ равны друг другу или пропорциональны како-то известной функции.

3. Переменные X_1, X_2, \dots, X_k являются независимыми и изменяются с пренебрежимо малой погрешностью по сравнению с величиной $\sigma(y_i)$. Для линейного полинома модель имеет вид:

$$\bar{Y} = b_0 + b_1 X$$

Для определения b_0 , b_1 используется метод наименьших квадратов. Сумма квадратов невязок равна:

$$S = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^n (Y_i - \beta_0 - \beta_1 \cdot X_i)^2$$

Приравнивая нулю частные производные от S по β_0 и β_1 получим:

$$b_0 n + b_1 \cdot \sum_{i=1}^n X_i = \sum_{i=1}^n Y_i$$

$$b_0 \sum_{i=1}^n X_i + b_1 \cdot \sum_{i=1}^n X_i^2 = \sum_{i=1}^n X_i \cdot Y_i$$

Эти уравнения называются нормальными.

Если ввести обозначения:

$$S_{XY} = \sum (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y}), \quad S_{XX} = \sum (X_i - \bar{X})^2, \quad S_{YY} = \sum (Y_i - \bar{Y})^2, \quad \bar{X} = \frac{\sum X_i}{n}, \quad \bar{Y} = \frac{\sum Y_i}{n}.$$

То решение можно записать в виде:

$$b_1 = \frac{S_{XY}}{S_{XX}}, \quad b_0 = \bar{Y} - b_1 \bar{X} = \frac{\sum Y_i}{n} - \frac{S_{XY}}{S_{XX}} \cdot \frac{\sum X_i}{n}.$$

Это же решение можно представить и следующим образом:

$$b_0 = \frac{\Delta_0}{\Delta}, \quad b_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}.$$

Где:

$$\Delta = \begin{vmatrix} n & \sum X_i \\ \sum X_i & \sum X_i^2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_0 = \begin{vmatrix} \sum Y_i & \sum X_i \\ \sum X_i Y_i & \sum X_i^2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} n & \sum Y_i \\ \sum X_i & \sum X_i Y_i \end{vmatrix}.$$

Проверку адекватности полученного уравнения опытным данным проводят по критерию Фишера :

$$F_{набл} = \frac{s_{aq}^2}{s_y^2}.$$

$$s_{aq}^2 = \frac{1}{n-k} \sum_{i=1}^n (Y_i - Y_{pi})^2; \quad s_y^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2; \quad \bar{Y} = \frac{\sum Y_i}{n},$$

где Y_{pi} - расчетное значение величины Y , вычисленное по полученному уравнению регрессии при подстановке в него опытных значений X ; k – количество коэффициентов в уравнении регрессии; $n-k$ – число степеней свободы.

Задавая уровень значимости q , по таблице Фишера для $n-k$ степеней свободы находят значение критерия Фишера F . Если оно больше вычисленного ($F > F_{набл}$), то полученная в виде регрессии модель адекватна результатам эксперимента. Если оно меньше вычисленного ($F < F_{набл}$), то требуется выбрать другой, более сложный вид уравнения.

Проверка значимости коэффициентов регрессии можно осуществить по критерию Стьюдента или построением доверительного интервала.

Для упрощения получения регрессионного уравнения и его анализа используют ортогонализацию полинома.

Вопросы

1. Какое направление математической статистики решает вопрос построения регрессионных зависимостей между случайной и неслучайными величинами.
2. Что такое уравнение регрессии
3. Что такое регрессионный анализ
4. Что включает в себя регрессионный анализ
5. Как определяют вид уравнения регрессии
6. Когда можно использовать МНК для построения уравнения регрессии
7. В каком виде выбирают зависимость для математического ожидания функции
8. Что такое коэффициенты регрессии
9. Что учитывает невязка
10. Какой вид принимает уравнение регрессии для точечных оценок
11. Какие используют допущения для упрощения способа нахождения коэффициентов регрессии
12. Чему равна сумма квадратов невязок равна для линейной регрессионной модели
13. При каком условии получают нормальные уравнения
14. Как можно записать решение нормальных уравнений
15. Как проверяют адекватность уравнения регрессии
16. Что используют для упрощения получения регрессионного уравнения и его анализа

Планирование эксперимента

Тема 14

Метод максимального правдоподобия

Метод наименьших квадратов (МНК) используется для оценки случайной величины в случае нормального ее распределения. Он является частным случаем метода максимального подобия (ММП), предложенного Р. Фишером. Метод максимального подобия (ММП) используется для оценки случайной величины при любых распределениях. В случае, если случайная величина нормально распределена из ММП вытекает метод наименьших квадратов. Следовательно, метод наименьших квадратов является частным случаем метода максимального правдоподобия для распределения случайной величины по нормальному закону.

В методе строится функция правдоподобия, аргументом которой является неизвестный параметр a .

Опр. Функцией правдоподобия случайной дискретной величины Y , которая в результате n испытаний принимает значения y_1, y_2, \dots, y_n называют функцию аргумента a вида $g(y_1, y_2, \dots, y_n; a)$, где y_1, y_2, \dots, y_n фиксированные значения зарегистрированных в эксперименте результатов.

Функцию подобия строят обычно в одном из двух видов:

- или как произведение вероятностей появления случайных величин при возможных различных значениях параметра a :

$$g(y_1, y_2, \dots, y_n; a) = P(y_1, a) \cdot P(y_2, a) \cdot \dots \cdot P(y_n, a).$$

- или как произведение плотностей вероятности случайных величин при возможных различных значениях параметра a :

$$g(y_1, y_2, \dots, y_n; a) = f(y_1, a) \cdot f(y_2, a) \cdot \dots \cdot f(y_n, a).$$

Опр. Метод максимального правдоподобия состоит в оценке неизвестного параметра $a = a(y_1, y_2, \dots, y_n)$ такой его величиной a^* , которая делает максимальной функцию правдоподобия $g(y_1, y_2, \dots, y_n; a)$.

Так как функция правдоподобия является произведением, то для отыскания оценки a^* удобно пользоваться логарифмической функцией правдоподобия: $\ln(g(y_1, y_2, \dots, y_n; a))$.

Точку максимума функции $\ln(g)$ аргумента a ищут обычно по следующему алгоритму:

1. Ищут производную $\frac{d \ln(g)}{da}$.

2. Приравниваем производную нулю и ищем критическую точку a^* . Уравнение представляющее собой равенство нулю производной:

$$\frac{d \ln(g)}{da} = 0$$

называют уравнением правдоподобия.

3. Ищется вторая производная $\frac{d^2 \ln(g)}{da^2}$. Если вторая производная

при $a=a^*$ отрицательна, то a^* - точка максимума.

Найденную точку максимума a^* принимают в качестве оценки наибольшего правдоподобия параметра a .

Метод наибольшего правдоподобия имеет следующие особенности:

1. Оценки максимального правдоподобия состоятельны;

2. Оценки максимального правдоподобия распределены асимптотически нормально (при больших значениях n приближаются к нормальному распределению).

3. Оценки максимального правдоподобия имеют наименьшую дисперсию, по сравнению с другими асимптотически нормальными оценками.

4. Если для оцениваемого параметра существует эффективная оценка, то уравнение правдоподобия имеет единственное решение.

5. Метод наиболее полно использует данные выборки об оцениваемом параметре (можно использовать при малых выборках).

ЗАМЕЧАНИЕ. **Состоятельной** называют статистическую оценку, которая при неограниченном увеличении объема выборки стремится по

вероятности к оцениваемому параметру a^* :
$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|a - a^*\right| < \varepsilon\right) = 1.$$

Свойство состоятельности означает, что когда объем выборки, стремится к бесконечности ($n \rightarrow \infty$) математическое ожидание оценки $M[a^*]$ стремится к оцениваемому параметру a , а ее дисперсия $D[a^*] = \sigma^2$ - к нулю. Следовательно, для состоятельной статистической оценки:

$$\begin{aligned} M[a^*] &\rightarrow a \\ D[a^*] &\rightarrow 0 \\ n &\rightarrow \infty \end{aligned}$$

Недостатком метода правдоподобия является то, что он бывает сложным для вычислений.

Постановка задачи

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ.

ЗАДАНО

1. Пусть эксперимент проведен в k опытных точках, где k – номер опыта.
2. Число повторных опытов в k -ой точке равно n_k .
3. Результат i – того опыта в k – той точке равен y_{ki} .
4. Для всех значений величины Y (значения получены из эксперимента) имеет место нормальный закон распределения:

$$f(y_{ki}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_k} \exp\left(-\frac{(y_{ki} - m_{yk})^2}{2\sigma_k^2}\right)$$

НАЙТИ:

Найти по результатам эксперимента точечные оценки a_0 и a_1 параметры уравнения регрессии: $\bar{y} = a_0 + a_1 X$

Алгоритм построения уравнения регрессии для линейной модели.

1. Строим функцию правдоподобия от аргументов a_0, a_1 :

$g(y_{11}, y_{12}, \dots, y_{1n_1}, y_{21}, y_{22}, \dots, y_{2n_2}, \dots, y_{N1}, y_{N2}, \dots, y_{Nn_N}; a_0, a_1) =$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} \exp\left(-\frac{(y_{1i} - m_{y1})^2}{2\sigma_1^2}\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} \exp\left(-\frac{(y_{2i} - m_{y2})^2}{2\sigma_2^2}\right) \dots =$$

$$= \prod_{k=1}^N \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_k} \prod_{i=1}^{nk} \exp\left(-\frac{(y_{ki} - \bar{y}_k)^2}{2\sigma_k^2}\right)$$

Здесь $m_k \approx \bar{y}_k$.

2. Строим логарифмическую функцию правдоподобия: $Ln(g)$.

$$Ln(g) = -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \sum_{i=1}^{nk} \left(\frac{(y_{ki} - \bar{y}_k)^2}{\sigma_k^2} \right) - \sum_{k=1}^N \frac{nk}{2} \ln(2\pi\sigma_k^2) = -S_1 - S_2$$

Где

$$S_1 = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \sum_{i=1}^{nk} \left(\frac{(y_{ki} - \bar{y}_k)^2}{\sigma_k^2} \right); \quad S_2 = \sum_{k=1}^N \frac{nk}{2} \ln(2\pi\sigma_k^2)$$

3. Так как a_0 и a_1 входят только в S_1 , минимизируем S_1 .

$$S_1 = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \sum_{i=1}^{nk} \left(-\frac{(y_{ki} - \bar{y}_k)^2}{\sigma_k^2} \right) = \min$$

Воспользуемся тождеством:

$$y_{ki} - \bar{y}_k = (y_{ki} - \bar{y}_{k \text{ ср}}) + (\bar{y}_{k \text{ ср}} - \bar{y}_k)$$

где $\bar{y}_{k \text{ ср}}$ – среднее значение в отдельных точках x_k , то есть:

$$\bar{y}_{k \text{ ср}} = \frac{1}{nk} \sum_{i=1}^{nk} y_{ki}$$

В этом случае сумма квадратов разбивается на два независимых слагаемых:

$$\sum_{k=1}^N \sum_{i=1}^{nk} \left(\frac{(y_{ki} - \bar{y}_k)^2}{\sigma_k^2} \right) = \sum_{k=1}^N \sum_{i=1}^{nk} \frac{(y_{ki} - \bar{y}_{k \text{ ср}})^2}{\sigma_k^2} + \sum_{k=1}^N \sum_{i=1}^{nk} \left(-\frac{(\bar{y}_{k \text{ ср}} - \bar{y}_k)^2}{\sigma_k^2} \right)$$

Так как смешанное произведение равно нулю.

Два слагаемых в полученном выражении характеризуют два вида рассеивания.

$$S_{1 \text{ вг}} = \sum_{k=1}^N \sum_{i=1}^{nk} \frac{(y_{ki} - \bar{y}_{k \text{ ср}})^2}{\sigma_k^2} - \text{зависит от рассеивания значений } y_{ki} \text{ относительно своих средних } \bar{y}_{k \text{ ср}}.$$

Это рассеивание называется внутригрупповым. Это слагаемое не зависит от a_0 и a_1 и не оказывает влияние на минимум S_1 .

$$S_{1 \text{ осм}} = \sum_{k=1}^N \sum_{i=1}^{nk} \left(-\frac{(\bar{y}_{k \text{ ср}} - \bar{y}_k)^2}{\sigma_k^2} \right) - \text{зависит от рассеивания своих средних}$$

значений $\bar{y}_{k \text{ ср}}$ относительно модели $\bar{y}_k = a_0 + a_1 x_k$. Это рассеивание называется взвешенной суммой квадратов остатков. Эта сумма квадратов позволяет путем подбора параметров a_0 и a_1 обеспечить минимум суммы квадратов S_1 и максимум функции правдоподобия.

Следовательно, в случае нормального распределения задача максимума правдоподобия сводится к минимизации суммы квадратов остатков, что представляет собой метод наименьших квадратов.

Выводы

Метод наименьших квадратов (МНК) используется для оценки случайной величины в случае нормального ее распределения.

Метод максимального подобия (ММП) используется для оценки случайной величины при любых распределениях.

Метод наименьших квадратов является частным случаем метода максимального правдоподобия для распределения случайной величины по нормальному закону.

Аргументом функции правдоподобия является неизвестный параметр a .

Функцией правдоподобия случайной дискретной величины Y , которая в результате n испытаний принимает значения y_1, y_2, \dots, y_n называют функцию аргумента a вида $g(y_1, y_2, \dots, y_n; a)$, где y_1, y_2, \dots, y_n фиксированные значения зарегистрированных в эксперименте результатов.

Функцию подобия строят обычно в одном из двух видов:

- или как произведение вероятностей появления случайных величин при возможных различных значениях параметра a :

$$g(y_1, y_2, \dots, y_n; a) = P(y_1, a) \cdot P(y_2, a) \cdot \dots \cdot P(y_n, a).$$

- или как произведение плотностей вероятности случайных величин при возможных различных значениях параметра a :

$$g(y_1, y_2, \dots, y_n; a) = f(y_1, a) \cdot f(y_2, a) \cdot \dots \cdot f(y_n, a).$$

Метод максимального правдоподобия состоит в оценке неизвестного параметра $a = a(y_1, y_2, \dots, y_n)$ такой его величиной a^* , которая делает максимальной функцию правдоподобия $g(y_1, y_2, \dots, y_n; a)$.

Так как функция правдоподобия является произведением, то для отыскания оценки a^* удобно пользоваться логарифмической функцией правдоподобия: $Ln(g(y_1, y_2, \dots, y_n; a))$.

Точку максимума функции $Ln(g)$ аргумента a ищут обычно по следующему алгоритму:

1. Ищут производную $\frac{d \ln(g)}{da}$.

2. Приравниваем производную нулю и ищем критическую точку a^* .

3. Ищется вторая производная $\frac{d^2 \ln(g)}{da^2}$. Если вторая производная

при $a=a^*$ отрицательна, то a^* - точка максимума.

Метод наибольшего правдоподобия имеет следующие особенности:

1. Оценки максимального правдоподобия состоятельны;
2. Оценки максимального правдоподобия распределены асимптотически нормально (при больших значениях n приближаются к нормальному распределению).
3. Оценки максимального правдоподобия имеют наименьшую дисперсию, по сравнению с другими асимптотически нормальными оценками.
4. Если для оцениваемого параметра существует эффективная оценка, то уравнение правдоподобия имеет единственное решение.
5. Метод наиболее полно использует данные выборки об оцениваемом параметре (можно использовать при малых выборках).

Недостатком метода правдоподобия является то, что он бывает сложным для вычислений.

Постановка задачи для метода максимального правдоподобия записывается в следующем виде:

1. Проведен эксперимент в k опытных точках, где k – номер опыта.
2. Число повторных опытов в k -ой точке равно n_k .
3. Результат i – того опыта в k – той точке равен y_{ki} .
4. Для всех значений величины Y (значения получены из эксперимента) имеет место определенный закон распределения: $f(y_{ki})$

Найти по результатам эксперимента точечные оценки параметров a_0, a_1, \dots, a_m уравнения выбранной модели: $\bar{y} = f(a_0, a_1, \dots, a_m, X)$

Вопросы

1. В каком случае используют метод наименьших квадратов
2. Когда используют метод максимального правдоподобия
3. Чем является метод наименьших квадратов относительно метода максимального правдоподобия
4. Что является аргументом функции правдоподобия
5. Что называют функцией правдоподобия
6. В каких двух видах строится функция правдоподобия
7. В чем состоит метод максимального правдоподобия
8. Почему в методе максимального правдоподобия используют логарифмическую функцию правдоподобия
9. Что представляет собой алгоритм отыскания максимума функции правдоподобия.
10. Перечислите особенности метода наибольшего правдоподобия
11. Назовите недостаток метода максимального правдоподобия
12. Как записывается постановка задачи для метода максимального правдоподобия

Ортогонализация и матричный подход в регрессионном анализе

Ортогонализация и кодирование переменной

ЗАМЕЧАНИЕ. Ортогонализация – построение для данной системы элементов векторного пространства (векторов, функций и т.д.) другой системы, которая порождает то же пространство, но ортогональна.

Ортогональность – равенство нулю скалярного произведения любой пары из заданной системы векторов.

Под ортогонализацией в регрессионном анализе понимают переход к кодированной переменной x_i симметричной относительно нового начала координат O_i и организации эксперимента так, что его структурная матрица становится ортогональной.

При планировании эксперимента факторы X_i из натуральных переменных (именованные величины с размерностью) переводятся в кодированные x_i обычно с ограничением $-1 < x_i < +1$. Этим преследуются различные цели:

- с алгебраической точки зрения – это стремление к ортогонализации системы функций;
- с точки зрения вычислений – к упрощению расчетов оценок коэффициентов полиномиальной модели;
- с обще-методической точки зрения – к созданию стандартизованного набора оптимальных планов, независимых от структуры и состава объекта.

Переход от натуральных переменных к кодированным можно осуществить двумя операциями: центрированием или масштабированием.

Центрирование – перенос начала координат системы кодированных факторов x_i в центр эксперимента с координатами в натуральных переменных:

$$X_{oi} = 0.5(X_{imax} + X_{imin})$$

Масштабирование – изменение центрированных числовых значений факторов в C раз:

$$C = \frac{1}{\Delta X_i}$$

Где ΔX_i – полу-диапазон изменения (так называемый диапазон варьирования) i - того фактора, вычисляемый по формуле:

$$\Delta X_i = 0.5(X_{imax} - X_{imin})$$

Кодированные переменные вычисляются по формуле:

$$x_i = \frac{X_i - X_{oi}}{\Delta X_i}$$

а возврат от них к натуральным переменным осуществляется по формуле:

$$X_i = x_i \Delta X_i + X_{oi}$$

Постановка задачи при кодировании переменной

Заданные значения эксперимента можно представить в следующем виде:

u	n_u	X_u	Y_{ui}				
			Y_{u1}	Y_{u2}	Y_{u3}	...	Y_{un}
1	n_1	X_1	Y_{11}	Y_{12}	Y_{13}	...	Y_{1n}
2	n_2	X_2	Y_{21}	Y_{22}	Y_{23}	...	Y_{2n}
...
N	n_N	X_N	Y_{N1}	Y_{N2}	Y_{N3}	...	Y_{Nn}

Особенность данных: факторы заданы равноотстоящие, т.е.:

$$d = X_u - X_{u-1}$$

(d - шаг квантования постоянный)

Необходимо построить уравнение регрессии.

Алгоритм построения уравнения регрессии для линейной модели при кодировании переменной.

1. Ортогонализация данных.

а) Определение начала координат. Начало координат (точка O_1) совпадает со средним значением:

$$\bar{X} = X_{01} = \frac{1}{N} \sum_{u=1}^N X_u$$

б) кодирование переменных:

$$x_u = \frac{X_u - \bar{X}}{d}$$

Для кодированной переменной выполняется:

$$\sum_{u=1}^N x_u = 0$$

То есть кодированная переменная принимает относительно нуля симметричные значения.

2. Построение уравнения регрессии.

Так как уравнение регрессии имеет вид:

$$\hat{y} = a_0 + a_1 X$$

то можно получить выражение и для кодирования переменной \hat{y} , так как имеет место:

$$\hat{y}_u = a_0 + a_1 X_u$$

где $X_u = x_u d + \bar{X}$. Следовательно: $\hat{y}_u = a_0 + a_1 x_u d + a_1 \bar{X} = a_0 + a_1 \bar{X} + a_1 d x_u = b_0 + b_1 x_u$. Это записывают в виде:

$$\hat{y}_u = b_0 x_{0u} + b_1 x_{1u}.$$

Где $x_{0u} = 1$ – фиктивная переменная

Матричный подход

Обычно метод наименьших квадратов представляется в матричном виде. Для этого стоят следующие матрицы:

1) Матрица столбец планирования эксперимента, которая задает координаты всех опытных точек:

$$X_n = [x_{11} \ x_{12} \ \dots \ x_{1N}]^T$$

2) Структурную матрицу:

$$X = \begin{bmatrix} x_{01} & x_{11} \\ x_{02} & x_{12} \\ \dots & \dots \\ x_{0N} & x_{1N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} \\ 1 & x_{12} \\ \dots & \dots \\ 1 & x_{1N} \end{bmatrix}$$

Эта матрица определяет количество переменных в уравнении регрессии и количество опытных точек N .

3) Матрица столбец искоемых коэффициентов регрессии:

$$B = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \end{bmatrix}$$

4) Матрица столбец средних значений отклика в опытных точках

$$\bar{Y} = [\bar{y}_1 \ \bar{y}_2 \ \dots \ \bar{y}_N]^T$$

Сделаем предположение, что все измерения равноточные, то есть все среднеквадратические отклонения \bar{y}_u равны. Тогда остаточную сумму квадратов и условие МНК можно записать в виде:

$$\sum_{u=1}^N (\bar{y}_u - \hat{y}_u)^2 = \sum_{u=1}^N (\bar{y}_u - (b_0 x_{0u} + b_1 x_{1u}))^2 = \min$$

В матричной форме это можно записать:

$$[\bar{Y} - XB]^T [\bar{Y} - XB]$$

После дифференцирования по вектору B получим систему нормальных уравнений в матричной форме:

$$\frac{d}{dB} [\bar{Y} - XB]^T [\bar{Y} - XB] = 2X^T [\bar{Y} - XB] = 0$$

Которая после преобразований приводится к виду:

$$X^T X B = X^T \bar{Y}$$

Матричная форма нормальных уравнений равносильна системе алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} b_0 \sum x_{0u}^2 + b_1 \sum x_{0u} x_{1u} &= \sum x_{0u} \bar{y}_u \\ b_0 \sum x_{0u} x_{1u} + b_1 \sum x_{1u}^2 &= \sum x_{1u} \bar{y}_u \end{aligned}$$

В приведенных матричных формах матрицу:

$$M = X^T X$$

Называют **информационной матрицей**, или матрицей системы нормальных уравнений. Вид этой матрицы влияет на точность определения b -коэффициентов, или информативность эксперимента, и на трудоемкость обработки данных.

Матрица вида:

$$C = [X^T X]^{-1}$$

Называется **дисперсионной**, так как она позволяет оценить дисперсию b -коэффициентов.

Матрица столбец B находится в виде:

$$B = C X^T \bar{Y}.$$

Ортогональность плана приводит к диагональной информационной матрице:

$$M = X^T X = \begin{bmatrix} x_{01} & x_{02} & \dots & x_{0N} \\ x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{01} & x_{11} \\ x_{02} & x_{12} \\ \dots & \dots \\ x_{0N} & x_{1N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x_{11} \\ 1 & x_{12} \\ \dots & \dots \\ 1 & x_{1N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum x_{0u}^2 & 0 \\ 0 & \sum x_{1u}^2 \end{bmatrix}$$

Из этой матрицы получается обратная дисперсионная матрица:

$$C = [X^T X]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{\sum x_{0u}^2} & \\ 0 & \frac{1}{\sum x_{1u}^2} \end{bmatrix}$$

Простота получения дисперсионной матрицы C достигается ввиду диагональности информационной матрицы M . Ортогонализация и состоит в том, что бы получить диагональную форму матрицы M . Ортогонализация и достигается через выбор симметричных относительно центра точек и кодировка их.

Ортогональность переменных x_0, x_1 означает, что сумма произведений элементов столбца матрицы X равна нулю:

$$\sum_{u=1}^N x_{0u} x_{1u} = 0$$

Выражения для расчета b-коэффициентов можно обобщить. Для ортогональных и линейных моделей можно записать:

$$b_i = \frac{\sum_{u=1}^N x_{iu} \bar{y}_u}{\sum_{u=1}^N x_{iu}^2}$$

Выводы

Ортогонализация – построение для данной системы элементов векторного пространства (векторов, функций и т.д.) другой системы, которая порождает то же пространство, но ортогональна.

Ортогональность – равенство нулю скалярного произведения любой пары из заданной системы векторов.

Под ортогонализацией в регрессионном анализе понимают переход к кодированной переменной x_i симметричной относительно нового начала координат O_i и организации эксперимента так, что его структурная матрица становится ортогональной.

При планировании эксперимента факторы X_i из натуральных переменных переводятся в кодированные x_i обычно с ограничением $-1 < x_i < +1$.

Кодированием преследуются различные цели:

- с алгебраической точки зрения – это стремление к ортогонализации системы функций;

- с точки зрения вычислений – к упрощению расчетов оценок коэффициентов полиномиальной модели;

- с обще-методической точки зрения – к созданию стандартизованного набора оптимальных планов, независимых от структуры и состава объекта.

Переход от натуральных переменных к кодированным можно осуществить двумя операциями:

- центрированием

- масштабированием.

Центрирование – перенос начала координат в центр эксперимента.

Масштабирование – изменение центрированных числовых значений факторов в C раз:

$$C = \frac{1}{\Delta X_i}$$

Где ΔX_i – диапазон варьирования i - того фактора

Кодированные переменные вычисляются по формуле:

$$x_i = \frac{X_i - X_{oi}}{\Delta X_i}$$

а возврат от них к натуральным переменным осуществляется по формуле:

$$X_i = x_i \Delta X_i + X_{0i}$$

Уравнение регрессии для кодированных переменных имеет вид:

$$\hat{y}_u = b_0 x_{0u} + b_1 x_{1u}.$$

Где $x_{0u} = 1$ – фиктивная переменная

Для матричного подхода в МНК стоят матрицы:

1) Матрица столбец планирования эксперимента

2) Структурную матрицу X

3) Матрица столбец искомых коэффициентов регрессии B

4) Матрица столбец средних значений отклика в опытных точках \bar{Y}

1) Матрица столбец планирования эксперимента, которая задает координаты всех опытных точек:

$$X_n = [x_{11} \ x_{12} \ \dots \ x_{1N}]^T$$

2) Структурную матрицу:

$$X = \begin{bmatrix} x_{01} & x_{11} \\ x_{02} & x_{12} \\ \dots & \dots \\ x_{0N} & x_{1N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} \\ 1 & x_{12} \\ \dots & \dots \\ 1 & x_{1N} \end{bmatrix}$$

3) Матрица столбец искомых коэффициентов регрессии:

$$B = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \end{bmatrix}$$

4) Матрица столбец средних значений отклика в опытных точках

$$\bar{Y} = [\bar{y}_1 \ \bar{y}_2 \ \dots \ \bar{y}_N]^T$$

В матричной форме остаточную сумму квадратов и условие МНК можно записать в виде:

$$[\bar{Y} - XB]^T [\bar{Y} - XB]$$

После дифференцирования по вектору B получим систему нормальных уравнений в матричной форме:

$$\frac{d}{dB} [\bar{Y} - XB]^T [\bar{Y} - XB] = 2X^T [\bar{Y} - XB] = 0$$

Которая после преобразований приводится к виду:

$$X^T XB = X^T \bar{Y}$$

В приведенных матричных формах матрицу:

$$M = X^T X$$

Называют **информационной матрицей**, или матрицей системы нормальных уравнений.

Матрица вида:

$$C = [X^T X]^{-1}$$

Называется **дисперсионной**, так как она позволяет оценить дисперсию b -коэффициентов.

Матрица столбец B находится в виде:

$$B = C X^T \bar{Y}.$$

Ортогональность плана приводит к диагональной информационной матрице

Простота получения дисперсионной матрицы C достигается ввиду диагональности информационной матрицы M .

Выражения для расчета b -коэффициентов можно обобщить. Для ортогональных и линейных моделей можно записать:

$$b_i = \frac{\sum_{u=1}^N x_{iu} \bar{y}_u}{\sum_{u=1}^N x_{iu}^2}$$

Вопросы

1. Что такое ортогонализация.
2. Что такое ортогональность относительно векторов
3. Что понимают под ортогонализацией в регрессионном анализе
4. Какие преследуются цели при кодировании переменных с точки зрения алгебры
5. Какие преследуются цели при кодировании переменных с точки зрения вычислений
6. Какие преследуются цели при кодировании переменных с общей методической точки зрения
7. Какими операциями можно выполнить переход к кодированию
8. Что такое центрирование
9. Что такое масштабирование
10. Как вычисляется кодирование
11. Как обеспечивается возврат от кодированных переменных к натуральным.
12. Как записывается уравнение регрессии для кодированных переменных
13. Какие матрицы строка для МНК
14. Что представляет собой матрица столбец планирования эксперимента
15. Что представляет собой матрица структуры
16. Что представляет собой матрица столбец искоемых коэффициентов регрессии
17. Что представляет собой матрица столбец средних значений отклика в опытных точках
18. Как записать в матричной форме условие МНК
19. Что представляет собой система нормальных уравнений МНК

20. Что такое информационная матрица
 21. Называется **дисперсионной**, так как она позволяет оценить дисперсию b -коэффициентов.
 22. Что такое дисперсионная матрица
 23. Как находят матрицу B
 24. К чему приводит ортогональность плана эксперимента.
 25. Как записывается обобщенное выражение для расчета b -коэффициентов

Планирование эксперимента

Тема 16

Анализ точности регрессионных моделей

После построения регрессионной зависимости проводят анализ ее точности. Этот анализ выполняется в несколько этапов:

1. Оценка дисперсии коэффициентов регрессии.
2. Оценка дисперсии отклика.
3. Проверка значимости коэффициентов регрессии.
4. Проверяют адекватность полученного уравнения опытным данным.

Оценка дисперсии коэффициентов регрессии и оценка дисперсии отклика.

Дисперсия измеряемого отклика D_y и дисперсия его среднего значения $D_{\bar{y}}$ величины неизвестные. Поэтому используют оценки этих величин.

В качестве оценки $D_{\bar{y}}$ используют средневзвешенную оценку

$$S_{\bar{y}}^2 = \frac{\sum_{u=1}^N f_u \cdot S_{y_u}^2}{\sum_{u=1}^N f_u}$$

где $f_u = n_u - 1$ - число степеней свободы оценки $S_{y_u}^2$.

Уравнение регрессии в кодированных координатах имеет вид:

$$\hat{y}_u = b_0 x_{0u} + b_1 x_{1u}.$$

На основании теоремы о дисперсии линейной функции независимых случайных величин, дисперсию предсказанного значения отклика \hat{y}_u можно записать в виде $D(\hat{y}_u) = D(b_0 x_{0u} + b_1 x_{1u})$, или:

$$D_{\hat{y}} = D_{b_0} \cdot x_{0u}^2 + D_{b_1} \cdot x_{1u}^2$$

А так как для ортогональных планов и линейных моделей выражение для расчета b - коэффициентов можно записать в виде:

$$b_i = \frac{\sum_{u=1}^N x_{iu} \bar{y}_u}{\sum_{u=1}^N x_{iu}^2}$$

то точно так же, на основании теоремы о дисперсии линейной функции независимых случайных величин, дисперсии b - коэффициентов можно записать в виде:

$$D_{b_i} = \frac{\sum_{u=1}^N D_{\bar{y}_u} \cdot x_{iu}^2}{\left(\sum_{u=1}^N x_{iu}^2 \right)^2} = \frac{D_{\bar{y}}}{\sum_{u=1}^N x_{iu}^2}.$$

Здесь использовано то обстоятельство, что все \bar{y}_u независимы и равнозначные ($D_{\bar{y}_1} = D_{\bar{y}_2} = \dots = D_{\bar{y}_N} = D_{\bar{y}}$). Для оценки b - коэффициентов используют:

$$S_{b_0}^2 = \frac{S_{\bar{y}}^2}{\sum_{u=1}^N x_{0u}^2}$$

$$S_{b_1}^2 = \frac{S_{\bar{y}}^2}{\sum_{u=1}^N x_{1u}^2}$$

Для оценки дисперсии предсказанного значения отклика \hat{y}_u , используют уже полученные оценки:

$$S_{\hat{y}_u}^2 = S_{b_0}^2 \cdot x_{0u}^2 + S_{b_1}^2 \cdot x_{1u}^2.$$

А следовательно оценка среднеквадратического отклонения предсказанного значения отклика \hat{y}_u равна:

$$S_{\hat{y}_u} = \sqrt{S_{\hat{y}_u}^2}$$

Число степеней свободы оценки дисперсии предсказанного значения отклика $S_{\hat{y}}^2$ равно числу степеней свободы оценок $S_{b_0}^2$, $S_{b_1}^2$:

$$f_{\hat{y}} = f_y = \sum_{u=1}^N f_u, \text{ где } f_u = n_u - 1 - \text{число степеней свободы оценок } S_{\bar{y}_u}^2.$$

Проверка значимости коэффициентов регрессии.

Постановка задачи. Заданы:

-оценки ошибок коэффициентов регрессии $S_{b_0}^2, S_{b_1}^2$;

-число степеней свободы оценок $S_{b_0}^2, S_{b_1}^2$: $f_b = f_{\hat{y}} = f_y = \sum_{u=1}^N f_u$, где

$f_u = n_u - 1$ - число степеней свободы оценок $S_{\bar{y}_u}^2$;

-уровень значимости α (обычно α выбирается равным 0.05).

Необходимо. При заданном уровне значимости α проверить нулевые гипотезы $H_0: \beta_0=0, \beta_1=0$, о равенстве нулю оцениваемых коэффициентов регрессии.

Решение.

1.Вычисляются наблюдаемые значения критериев Стьюдента.

Для b_0 : $T_{набл0} = \frac{|b_0|}{S_{b_0}}$. И для b_1 : $T_{набл1} = \frac{|b_1|}{S_{b_1}}$.

2.По таблице критических точек распределения Стьюдента, по заданному уровню значимости α , и числу степеней свободы f_b находят критические точки $t_{\text{двустр.кр}}(\alpha/2, f_b)$.

3.Проводится анализ расчетного и заданного критериев Стьюдента. Если $|T_{набл}| > t_{\text{двустр.кр}}(\alpha/2, f_b)$ – нулевую гипотезу отвергают и в этом случае b -коэффициенты считаются значимыми.

Если $|T_{набл}| < t_{\text{двустр.кр}}(\alpha/2, f_b)$ – нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу ($H_0: \beta_0=0, \beta_1=0$). В этом случае коэффициенты регрессии не значимы и уравнение регрессии не является удовлетворительной моделью исследуемого явления.

Если для расчетных данных выполняется:

$$S_{b_0} \ll |b_0| \text{ и } S_{b_1} \ll |b_1|,$$

проверку значимости b -коэффициентов не делают, так как в этом случае выполняется $|T_{набл}| > t_{\text{двустр.кр}}(\alpha/2, f_b)$.

Проверка адекватности уравнения регрессии.

ЗАМЕЧАНИЕ. Под словом адекватность понимают соответствие чему то. В данном случае после расчета уравнения регрессии делают проверку соответствия полученного уравнения опытными данными.

Распространены два варианта проверки адекватности модели:

-проверка адекватности полученного уравнения опытными данными путем построения доверительной области для \hat{y} .

-проверка адекватности полученного уравнения опытными данными по критерию Фишера.

1.Проверка адекватности полученного уравнения опытными данными путем построения доверительной области для \hat{y} .

Задается уровень значимости α и зная число степеней свободы оценок \hat{y} : $f_y = \sum_{u=1}^N f_u$, определяется критерий Стьюдента $t_{\text{двуст.кр.}}(\alpha/2, f_y)$.

Для построения доверительной области каждому значению \hat{y}_u вычисляют значение доверительного полуинтервала:

$$I_u = S_{\hat{y}_u} \cdot t_{\text{двуст.кр.}}(\alpha/2, f_y).$$

Где: $S_{\hat{y}_u}^2 = S_{b0}^2 \cdot x_{0u}^2 + S_{b1}^2 \cdot x_{1u}^2$.

Границы доверительной области задаются уравнением:

$$y_{\text{гр.}}(x_u) = \hat{y}(x_u) \pm I_u$$

где плюс соответствует верхней границе $y_{\text{в}}(x)$, а минус нижней границе $y_{\text{н}}(x)$ интервала.

Если экспериментальные точки \bar{y}_u не выходят за пределы доверительной области:

$$|\bar{y}_u - \hat{y}_u| < I_u,$$

модель считается адекватной.

2. Проверка адекватности полученного уравнения опытным данным по критерию Фишера будет рассмотрена дальше.

Алгоритм проведения анализа точности регрессионных моделей

1. Оценка дисперсии коэффициентов регрессии и оценка дисперсии отклика.

1.	Оценка дисперсии y_u	$S_u^2 = \frac{1}{n_u - 1} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n_u} y_{ui}^2 - n_u \cdot \bar{y}_u^2 \right)$, где $u=1, 2, \dots, N$
2.	Оценка дисперсии \bar{y}_u	$S_{\bar{y}_u}^2 = \frac{S_u^2}{n_u}$
3.	Число степеней свободы оценки $S_{\bar{y}_u}^2$	$f_u = n_u - 1$
4.	Средневзвешенную оценку \bar{y}	$S_{\bar{y}}^2 = \frac{\sum_{u=1}^N f_u \cdot S_{\bar{y}_u}^2}{\sum_{u=1}^N f_u}$
5.	Оценки b - коэффициентов	$S_{b0}^2 = \frac{S_{\bar{y}}^2}{\sum_{u=1}^N x_{0u}^2}$, $S_{b1}^2 = \frac{S_{\bar{y}}^2}{\sum_{u=1}^N x_{1u}^2}$
6.	Оценка дисперсии предсказанного значения отклика	$S_{\hat{y}_u}^2 = S_{b0}^2 \cdot x_{0u}^2 + S_{b1}^2 \cdot x_{1u}^2$

7.	Оценка среднеквадратического отклонения предсказанного значения отклика \hat{y}_u	$S_{\hat{y}_u} = \sqrt{S_{\hat{y}_u}^2}$
----	---	--

2. Проверка значимости коэффициентов регрессии.

1.	Задается уровень значимости	α
2.	Вычисляются наблюдаемые значения критериев Стьюдента для b_0 и b_1	$T_{набл0} = \frac{ b_0 }{S_{b0}}$., $T_{набл1} = \frac{ b_1 }{S_{b1}}$
3.	Находят критические точки	$t_{двуст.кр}(\alpha/2, f_b)$
4.	Проводится анализ расчетного и заданного критериев Стьюдента.	Если $ T_{набл} > t_{двуст.кр}(\alpha/2, f_b)$ коэффициенты считаются значимыми.

3. Проверка адекватности полученного уравнения путем построения доверительной области для \hat{y} .

1.	Задается уровень значимости	α
2.	Определяем число степеней свободы оценок	$f_y = \sum_{u=1}^N f_u$
3.	Определяем критерий Стьюдента	$t_{двуст.кр}(\alpha/2, f_y)$
4.	Вычисляем значение доверительного полуинтервала каждому значению \hat{y}_u	$I_u = S_{\hat{y}_u} \cdot t_{двуст.кр}(\alpha/2, f_y)$
5.	Проверяем адекватность модели	При $ \bar{y}_u - \hat{y}_u < I_u$, модель считается адекватной.

Выводы

Анализ точности регрессионной модели содержит:

1. Оценка дисперсии коэффициентов регрессии.
2. Оценка дисперсии отклика.
3. Проверка значимости коэффициентов регрессии.
4. Проверяют адекватность полученного уравнения опытным данным.

В качестве оценки дисперсии среднего значения измеряемого отклика используют средневзвешенную оценку

$$S_{\bar{y}}^2 = \frac{\sum_{u=1}^N f_u \cdot S_{\bar{y}_u}^2}{\sum_{u=1}^N f_u}$$

Средневзвешенную оценку используют потому, что дисперсия измеряемого отклика D_y и дисперсия его среднего значения $D_{\bar{y}}$ величины неизвестные.

На основании теоремы о дисперсии линейной функции независимых случайных величин, дисперсию предсказанного значения отклика \hat{y}_u можно записать в виде:

$$D_{\hat{y}} = D_{b_0} \cdot x_{0u}^2 + D_{b_1} \cdot x_{1u}^2$$

Дисперсии b - коэффициентов записывают, используя выражение для

$$b_i = \frac{\sum_{u=1}^N x_{iu} \bar{y}_u}{\sum_{u=1}^N x_{iu}^2}$$

В этом случае дисперсии равны

$$D_{b_i} = \frac{D_{\bar{y}}}{\sum_{u=1}^N x_{iu}^2}.$$

Для оценки b - коэффициентов используют:

$$S_{b_0}^2 = \frac{S_{\bar{y}}^2}{\sum_{u=1}^N x_{0u}^2}, \quad S_{b_1}^2 = \frac{S_{\bar{y}}^2}{\sum_{u=1}^N x_{1u}^2}$$

Оценка среднеквадратического отклонения предсказанного значения отклика \hat{y}_u равна:

$$S_{\hat{y}_u} = \sqrt{S_{\hat{y}_u}^2}, \text{ где } S_{\hat{y}_u}^2 = S_{b_0}^2 \cdot x_{0u}^2 + S_{b_1}^2 \cdot x_{1u}^2$$

При проверке значимости коэффициентов регрессии вычисляют наблюдаемые значения критериев Стьюдента

$$T_{\text{набл}0} = \frac{|b_0|}{S_{b_0}}, \text{ и } T_{\text{набл}1} = \frac{|b_1|}{S_{b_1}}.$$

По таблице критических точек распределения Стьюдента, по заданному уровню значимости α , и числу степеней свободы f_b находят критические точки $t_{\text{двуст.кр}}(\alpha/2, f_b)$.

Если $|T_{\text{набл}}| > t_{\text{двуст.кр}}(\alpha/2, f_b)$ – b -коэффициенты считаются значимыми.

Если для расчетных данных выполняется:

$$S_{b_0} \ll |b_0| \text{ и } S_{b_1} \ll |b_1|,$$

проверку значимости b -коэффициентов не делают, так как в этом случае выполняется $|T_{\text{набл}}| > t_{\text{двуст.кр}}(\alpha/2, f_b)$.

Проверка адекватности полученного уравнения опытным данным путем построения доверительной области для \hat{y} . В этом случае задает-

ся уровень значимости α и зная число степеней свободы оценок \hat{y} :

$$f_y = \sum_{u=1}^N f_u, \text{ определяется критерий Стьюдента } t_{\text{догуст.кр.}}(\alpha/2, f_y).$$

Для построения доверительной области каждому значению \hat{y}_u вычисляют значение доверительного полуинтервала:

$$I_u = S_{\hat{y}_u} \cdot t_{\text{догуст.кр.}}(\alpha/2, f_y).$$

Если экспериментальные точки \bar{y}_u не выходят за пределы доверительной области:

$$|\bar{y}_u - \hat{y}_u| < I_u,$$

модель считается адекватной.

Вопросы

Что содержит анализ точности регрессионной модели

Что используют в качестве оценки дисперсии среднего значения измеряемого отклика

Почему в качестве оценки дисперсии среднего значения измеряемого отклика используют средневзвешенную оценку

Какая теорема используется для получения записи дисперсии предсказанного значения отклика \hat{y}_u

Какое выражение используют для записи дисперсии b -коэффициентов

Что вычисляют при проверке значимости коэффициентов регрессии

Когда b -коэффициенты считаются значимыми

Как определяют адекватность регрессионной модели

Что вычисляют для построения доверительного полуинтервала

По какому условию определяется адекватность регрессионной модели.

Планирование эксперимента

Тема 17

Организация эксперимента

Многофакторный эксперимент

Понятие методики проведения эксперимента

Перед экспериментом следует этап подготовки к эксперименту. Это этап создания методики проведения эксперимента.

Опр. Методика проведения эксперимента – это документ, который содержит постановку задачи и предлагаемый метод решения этой задачи.

Методика должна содержать следующие разделы:

1. Обоснование выбора заданного объекта исследования и обоснование необходимости проведения эксперимента.
2. Описание объекта исследования и формулировка цели экспериментального исследования.
3. Выбор откликов заданного объекта.
4. Выбор факторов и интервалов варьирования этих факторов.
5. Разработка экспериментальной установки для проведения эксперимента.
6. Разработка плана проведения эксперимента.
7. Разработка метрологического обеспечения для проведения эксперимента.
8. Разработка обеспечения по обработке результатов эксперимента.
9. Разработка средств по представлению результатов эксперимента.
10. Прогнозируемые выводы, которые могут быть получены в результате проведения эксперимента.

Построение методики основано на производственной необходимости и связано с обзором электронных носителей информации, литературных источников, научных отчетов по рассматриваемой тематике. Этот обзор позволяет сделать вывод о текущем состоянии решаемой задачи и наметить основные вопросы, которые необходимо решить относительно заданной задачи. Поэтому фактически всегда разработке методики предшествует проведение обзора априорной информации, а вся методика содержит основные моменты этого обзора как обоснование предлагаемых действий по проведению эксперимента.

Объект исследования.

Опр. Объект исследования – это объект, который является носителем некоторых свойств и качеств, подлежащих изучению в соответствии с задачей эксперимента.

Объектом исследования может быть физические объекты, процессы, явления, а также их физические или математические модели.

Любой объект исследования может быть представлен в виде кибернетической модели “черного ящика” с переменными воздействиями входа и реакцией выхода.

Опр. Многооткликовый объект – это объект, в котором исследователя интересует несколько выходных переменных.

Факторы и отклики модели объекта

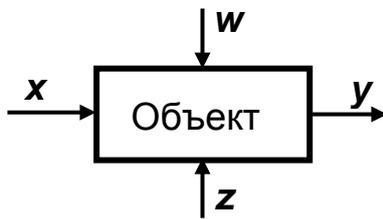


Рис. 1

Многооткликовый объект можно представить в виде схемы, представленной на рис.1. На схеме представлены все параметры, определяющие состояние объекта. Как уже отмечалось эти параметры делятся на четыре группы. Для планирования факторного эксперимента рассматриваются только входные переменные (факторы) $x=(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и выходные величины (отклики) $y=(y_1,$

$y_2, \dots, y_n)$. Следовательно:

- факторы - это управляемые и контролируемые параметры объекта;
- отклики – это величины, которые характеризуют поведение и свойства объекта при его эксплуатации.

Значения факторов заключены в определенном интервале.

Задача эксперимента – отыскание зависимости между откликом и действующими на объект факторами:

$$y=f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Воздействие контролируемых, но неуправляемых параметров $z=(z_1, z_2, \dots, z_n)$ и неконтролируемых и неуправляемых параметров $w=(w_1, w_2, \dots, w_n)$ являются помехами, которые могут исказить значение отклика. Для уменьшения влияния этих параметров могут быть использованы:

- стабилизация условий проведения эксперимента;
- защита объекта от воздействий помех;
- принципы рандомизации проведения эксперимента.

Основные понятия многофакторного эксперимента

Пусть модель черного ящика представлена зависимостью:

$$y=f(x_1, x_2, \dots, x_k)$$

и пусть в окрестности некоторой точки $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_k^0)$ функция может быть разложена в ряд Тейлора. Это может быть в том случае, если существуют частные производные функции в окрестности этой точки. Или, говорят, что функция в окрестности заданной точки гладкая. На практике используют из ряда Тейлора обычно линейную его часть (полином 1-го порядка) или разложение на полином 2-го порядка.

Опр. Пространство, образованное координатами x_1, x_2, \dots, x_k , называется факторным.

Опр. Точка факторного пространства называется опытной точкой.

Опытной точке соответствует вектор –фактор. В каждой опытной точке может производиться одно или несколько независимых измерений отклика. В этом случае, вектор - фактору ставится в соответствие значение отклика y .

Опр. Набор значений факторов, которые реализуются в эксперименте называют областью эксперимента.

Опр. Совокупность значений отклика для соответствующих векторов – факторов называется поверхностью отклика.

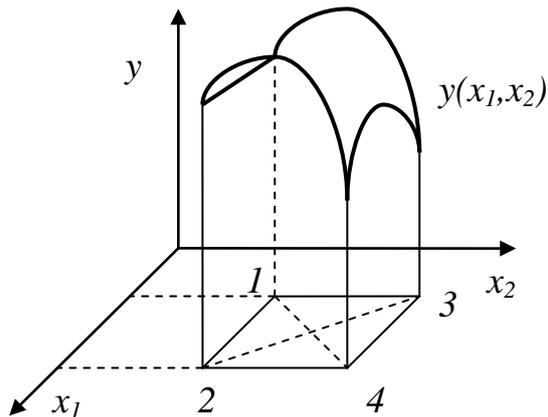


Рис.2

ПРИМЕР. Двухфакторное пространство x_1Ox_2 с четырьмя опытами представлено на рис. 2. Здесь же указана поверхность отклика. Поверхность отклика можно построить только в прямоугольной системе координат. Набор значений факторов (точки 1-4) образуют область эксперимента.

Многофакторный эксперимент состоит из ряда опытов. В каждом опыте устанавливается заданный набор факторов и измеряется отклик. Один опыт дает одно значение отклика, соответствующее конкретной точке факторного пространства. Для повышения точности можно проводить несколько независимых опытов.

Опр. Повторные опыты в выбранной точке факторного пространства, проводимые для повышения точности значения отклика, называются параллельными.

Точность отклика (значения y) зависит от размера области эксперимента. Если кривизна большая, степень полинома нужно увеличивать, что будет усложнять эксперимент и его обработку. Маленькая область не достаточно точно будет отражать модель объекта. Различают:

- область эксперимента;
- область исследования.

Наилучший случай – когда эти области совпадают. Если область исследования значительно превосходит область эксперимента, то используют принцип дискретного обзора факторного пространства.

Рис.3.

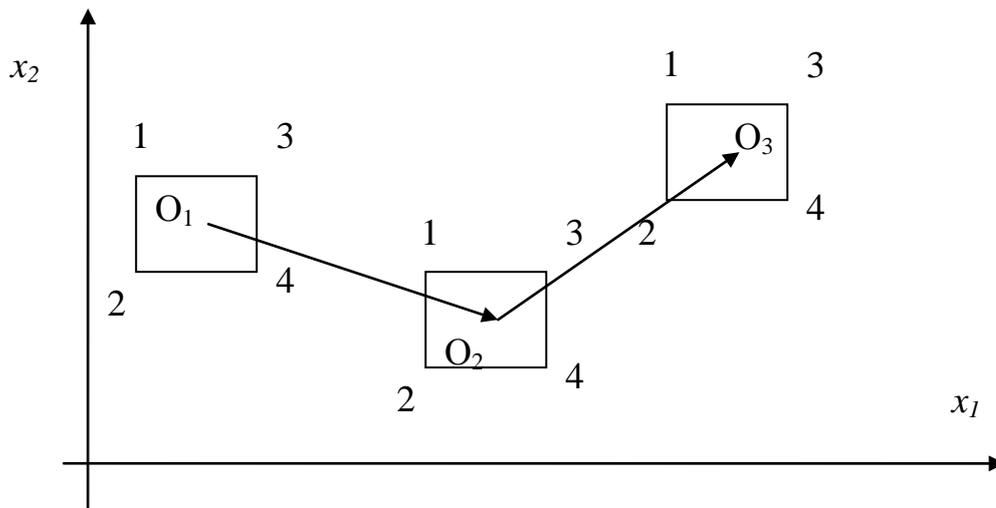


Рис.3.

Формулировка цели эксперимента

Формулировка цели эксперимента может быть связана:

- с определением степени влияния факторов на отклик;
- построением модели объекта;
- оптимизацией объекта.

Это связано с различными стадиями разработки объекта и общей задачей решаемой исследуемым объектом.

Выбор откликов

Модель может строиться для одного или нескольких откликов. Многооткликовый объект называют еще многокритериальный. В некоторых случаях много откликов можно свести в один общий, который носит название функции цели.

Выбору отклика предшествует обработка априорной информации. Отклик должен удовлетворять определенные требования:

1. Иметь физический смысл.
2. Обладать однозначностью, то есть определенному вектору факторов соответствует только одно значение отклика.
3. Являться количественной величиной, то есть величиной, которую можно измерить с определенной погрешностью.

Отклик должен достаточно полно характеризовать объект с точки зрения решения заданной задачи.

Выбор факторов

Выбор факторов связан с обработкой априорной информации. В результате проведения эксперимента может быть выявлены дополнительные факторы, влияющие на отклик. При этом нужно учесть, что

1. Если не будет учтен какой-либо важный фактор, изменение этого фактора может привести к построению неточных моделей объекта.
2. Если включить в эксперимент факторы, слабо влияющие на отклик, то это приведет к усложнению обработки эксперимента.

ВЫВОД. Эксперимент должен учитывать все факторы и желательно исключить из него слабо действующие на него факторы. То есть эксперимент должен быть связан с существенными факторами.

Существенно факторы могут быть выделены методом однофакторного эксперимента. В этом случае:

1. В эксперименте выбирают параметры которые могут представлять собой факторы.
2. Выбранные параметры поочередно изменяются на 10-20% от своего среднего значения при постоянных значениях других параметров.
3. Регистрируют соответствующие изменения отклика. К существенным факторам относят те параметры, которые одинаково влияют на отклик.

При выборе факторов выбирают и диапазон их изменения. Этот диапазон должен быть подобран для каждого фактора так, чтобы отклик изменялся в том же диапазоне. То есть если мы изменяем фактор на 10-20%, то и отклик меняется на 10-20% своего среднего значения.

Факторы должны отвечать следующим требованиям:

1. Факторы являются независимыми друг от друга величинами.
2. При проведении эксперимента можно задать два конкретных граничных значения фактора.
3. Точность задания фактора должна быть на порядок выше точности измерения отклика.
4. Факторы должны быть совместимыми, то есть не приводить к аварийности объекта.

Выводы

Методика проведения эксперимента – это документ, который содержит постановку задачи и предлагаемый метод решения этой задачи.

Методика должна содержать следующие разделы:

11. Обоснование выбора заданного объекта исследования и обоснование необходимости проведения эксперимента.
12. Описание объекта исследования и формулировка цели экспериментального исследования.
13. Выбор откликов заданного объекта.

14. Выбор факторов и интервалов варьирования этих факторов.
15. Разработка экспериментальной установки для проведения эксперимента.
16. Разработка плана проведения эксперимента.
17. Разработка метрологического обеспечения для проведения эксперимента.
18. Разработка обеспечения по обработке результатов эксперимента.
19. Разработка средств по представлению результатов эксперимента.
20. Прогнозируемые выводы, которые могут быть получены в результате проведения эксперимента.

Обзор априорной информации позволяет сделать вывод о текущем состоянии решаемой задачи и наметить основные вопросы, которые необходимо решить относительно заданной задачи

Объект исследования – это объект, который является носителем некоторых свойств и качеств, подлежащих изучению в соответствии с задачей эксперимента.

Любой объект исследования может быть представлен в виде кибернетической модели “черного ящика” с переменными воздействиями входа и реакцией выхода.

Многооткликный объект – это объект, в котором исследователя интересует несколько выходных переменных.

Для планирования факторного эксперимента рассматриваются только входные переменные (факторы) $x=(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и выходные величины (отклики) $y=(y_1, y_2, \dots, y_n)$.

Факторы - это управляемые и контролируемые параметры объекта;

Отклики – это величины, которые характеризуют поведение и свойства объекта при его эксплуатации.

Задача эксперимента – отыскание зависимости между откликом и действующими на объект факторами:

$$y=f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Для уменьшения влияния помех могут быть использованы:

- стабилизация условий проведения эксперимента;
- защита объекта от воздействий помех;
- принципы рандомизации проведения эксперимента.

На практике модель черного ящика представлена линейной составляющей ряда Тейлора.

Пространство, образованное координатами x_1, x_2, \dots, x_k , называется факторным.

Точка факторного пространства называется опытной точкой.

Набор значений факторов, которые реализуются в эксперименте называют областью эксперимента.

Совокупность значений отклика для соответствующих векторов – факторов называется поверхностью отклика.

Многофакторный эксперимент состоит из ряда опытов. В каждом опыте устанавливается заданный набор факторов и измеряется отклик.

Повторные опыты в выбранной точке факторного пространства, проводимые для повышения точности значения отклика, называются параллельными.

Различают:

- область эксперимента;
- область исследования.

Если область исследования значительно превосходит область эксперимента, то используют принцип дискретного обзора факторного пространства.

Формулировка цели эксперимента может быть связана:

- с определением степени влияния факторов на отклик;
- построением модели объекта;
- оптимизацией объекта.

Модель может строиться для одного или нескольких откликов. В некоторых случаях много откликов можно свести в один общий, который носит название функции цели.

Отклик должен удовлетворять определенные требования:

1. Иметь физический смысл.
2. Обладать однозначностью.
3. Являться количественной величиной.

При выборе факторов нужно учесть, что

1. Если не будет учтен какой-либо важный фактор, изменение этого фактора может привести к построению неточных моделей объекта.
2. Если включить в эксперимент факторы, слабо влияющие на отклик, то это приведет к усложнению обработки эксперимента.

Существенно факторы могут быть выделены методом однофакторного эксперимента

Диапазон изменения факторов должен быть подобран так, чтобы отклик изменялся в том же диапазоне.

Факторы должны отвечать следующим требованиям:

1. Факторы являются независимыми величинами.
2. При проведении эксперимента можно задать два конкретных граничных значения фактора.
3. Точность задания фактора должна быть на порядок выше точности измерения отклика.
4. Факторы должны быть совместимыми.

Вопросы

1. Что такое методика проведения эксперимента
2. Что содержит методика проведения эксперимента
3. Что позволяет сделать обзор априорной информации
4. Что такое объект исследования
5. Как может быть представлен любой объект исследования
6. Что такое Многооткликовый объект
7. Какие переменные рассматриваются для планирования эксперимента
8. Что такое факторы
9. Что такое отклик
10. Что представляет собой задача эксперимента
11. Что используют для уменьшения помех
12. Что такое факторное пространство
13. Как называют точку факторного пространства
14. Что такое область эксперимента
15. Что такое поверхность отклика
16. Из чего состоит многофакторный эксперимент.
17. Что производится в каждом опыте многофакторного эксперимента.
18. Какие опыты называются параллельными.
19. Какие области различают для эксперимента.
20. Что выполняют если область исследования значительно превосходит область эксперимента
21. С чем связана формулировка цели эксперимента
22. Для скольких откликов строиться модель
23. Что такое функция цели.
24. Чему должен отклик
25. Что нужно учесть при выборе факторов.
26. Как выделить существенные факторы.
27. Как должен быть подобран диапазон изменения факторов
28. Каким требованиям должны соответствовать факторы.

Планирование эксперимента

Тема 18

Организация эксперимента Многофакторный эксперимент Кодирование переменных

Так как и в регрессионном анализе, планирование и обработка эксперимента осуществляется в кодированных величинах. Формула кодирования имеет вид:

$$x_i = \frac{X_i - X_i^0}{h_i},$$

где x_i - кодированный фактор;

X_i - значение фактор;

X_i^0 - основной уровень фактора;

h_i - интервал варьирования фактора.

При кодировании фактора выполняется переход от физической величины в некоторую относительную, безразмерную величину. Называют:

1.Основной уровень фактора – значение фактора относительно, которого он изменяется в заданном эксперименте.

2.Интервал варьирования фактора – половина диапазона, в котором изменяется фактор:

$$h_i = \frac{X_{i\text{в}} - X_{i\text{н}}}{2},$$

где $X_{i\text{в}}$ - верхнее значение фактора;

$X_{i\text{н}}$ - нижнее значение фактора.

3.Основной уровень фактора – середина диапазона варьирования фактора:

$$X_i^0 = \frac{X_{i\text{в}} + X_{i\text{н}}}{2}.$$

Наиболее распространены двухуровневые факторные эксперименты.

Опр.Двухуровневый факторный эксперимент – это такой эксперимент – в котором фактор варьируется на двух уровнях, принимая только нижнее $X_{i\text{н}}$ и $X_{i\text{в}}$ верхнее значения.

При двухуровневом эксперименте кодированные факторы x_i имеют два значения: -1 ; $+1$. В этом случае интервал варьирования всех факторов является одним и тем же и равен 1.

Замечания относительно выбора основного уровня X_i^0 и интервала варьирования h_i

1.В качестве основного уровня варьирования фактора выбирают номинальное или расчетное значения центра области эксперимента.

2.Интервал варьирования определяет размер области эксперимента.

3.Интервал варьирования выбирают на порядок больше среднеквадратического отклонения величины. В этом случае используют расчетные формулы:

а) точность измерения среднеквадратического отклонения величины определяется по формуле:

$$\sigma_u = \frac{1}{3} \Delta_{u \text{ max}};$$

б) Максимальная ошибка измерения данной величины (если величина измеряется прибором):

$$\Delta_{u \max} = \frac{A_{\text{шк}} K}{100}$$

где $A_{\text{шк}}$ - шкала или диапазон измерения;
 K - класс точности прибора.

в) интервал варьирования фактора:

$$h_u = 10\sigma_u.$$

4. Результаты кодирования факторов заносят в **таблицу условий эксперимента**

Значение факторов	X_1	X_2	...	X_n
Основной уровень				
Интервал варьирования				
Верхний уровень				
Нижний уровень				
Натуральное значение фактора				
Кодированное значение фактора				

Теоретическая модель многофакторного эксперимента.

Многофакторные эксперименты описываются полиномиальными моделями. Это связано с тем, что исследуемые функции нескольких переменных в области эксперимента могут быть разложены в ряд Тейлора. Разложение функции в ряд Тейлора с точностью до порядка $n+1$ малой величины может быть представлено в виде:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_k) = f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_k^0) + df(x_1^0, x_2^0, \dots, x_k^0) + \frac{1}{2!} d^2 f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_k^0) + \dots + \frac{1}{n!} d^n f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_k^0) + O^n(\rho)$$

Эта запись соответствует записи сумм полиномов первого, второго и более высокого порядков. На практике рассматривается модель обычно как полином первого, реже второго порядка. Она может быть записана в виде

- для 1-го порядка:

$$y \approx f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_k^0) + \sum_{i=1}^k \frac{\partial}{\partial x_i} f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_k^0) \Delta x_i = f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_k^0) + \frac{\partial}{\partial x_1} f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_k^0) \Delta x_1 + \frac{\partial^2}{\partial x_2} f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_k^0) \Delta x_2 + \dots + \frac{\partial^k}{\partial x_k} f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_k^0) \Delta x_k$$

Если в качестве разложения выбрать центр плана $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_k^0) = (0, 0, \dots, 0)$, то запись ряда Тейлора называется рядом Маклорена и для разложения до производных первого порядка имеет вид:

$$y \approx f(0, 0, \dots, 0) + \frac{\partial}{\partial x_1} f(0, 0, \dots, 0) \cdot x_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} f(0, 0, \dots, 0) \cdot x_2 + \dots + \frac{\partial^k}{\partial x_k} f(0, 0, \dots, 0) \cdot x_k$$

Это линейная модель вида:

$$y \approx b_0 + b_1 \cdot x_1 + b_2 \cdot x_2 + \dots + b_k \cdot x_k$$

Ее можно записать в виде:

$$y \approx b_0 + \sum_{i=1}^k b_i \cdot x_i$$

По аналогии для квадратичной модели (модели второго порядка) можно записать:

$$y \approx b_0 + \sum_{i=1}^k b_i \cdot x_i + \sum_{i=1}^k b_{ii} \cdot x_{ii} + \sum_{i=1}^k \prod_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^k b_{ij} \cdot x_i \cdot x_j$$

Матрица планирования эксперимента.

Различают полный многофакторный эксперимент и дробный многофакторный эксперименты.

В полном многофакторном эксперименте реализуются все возможные сочетания уровней факторов. Для двух уровневых экспериментов общее число опытов равно:

$$2^k$$

где k – число факторов.

Если в опыте используется только верхний и нижний уровни фактора, то кодированные значения факторов будут соответственно равны +1 и -1. Для простоты записи единицы обычно опускают. Условия эксперимента обычно записывают в виде матрицы планирования эксперимента.

Опр. Матрица планирования эксперимента – это условная запись значений кодированных величин, где строки соответствуют различным опытам, а столбцы значениям факторов.

Пример матрицы планирования эксперимента для двух факторов 2^2

№ опыта	X_1	X_2	Y
1	–	–	
2	+	–	
3	–	+	
4	+	+	

Матрица планирования записывается в виде:

$$X_n = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ +1 & -1 \\ -1 & +1 \\ +1 & +1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{21} \\ x_{12} & x_{22} \\ x_{13} & x_{23} \\ x_{14} & x_{24} \end{bmatrix}$$

Составленные матрицы обладают тремя важными свойствами:

1. Симметрии.
2. Нормировки.
3. Ортогональности.

Симметрия – все наборы факторов симметричны относительно центра плана, или сумма элементов любого столбца матрицы планирования равна нулю:

$$\sum_{u=1}^N x_{iu} = 0, \quad i=1, 2, \dots, k.$$

Нормировка – сумма квадратов элементов любого столбца равна количеству строк:

$$\sum_{u=1}^N x_{iu}^2 = N, \quad i=1, 2, \dots, k.$$

Ортогональность – сумма произведений элементов любых двух столбцов равна нулю:

$$\sum_{u=1}^N x_{iu} \cdot x_{ju} = 0, \quad i \neq j; \quad i, j=1, 2, \dots, k.$$

Планирование эксперимента

План эксперимента должен указывать:

Количество параллельных опытов и последовательность их проведения.

Количество параллельных опытов определяется соотношением:

$$n \geq \frac{\sigma_y^2}{\sigma_{\bar{y}}^2}$$

где σ_y^2 - среднеквадратическое отклонение одного наблюдения;

$\sigma_{\bar{y}}^2$ - среднеквадратическое отклонение выборочного среднего n наблюдений.

Последовательность проведения опытов определяется рандомизацией. Это означает, что опыты проводятся не в той последовательности, которая указана в плане, а в случайном порядке. Для этого можно использовать таблицу случайных чисел. Рандомизация обеспечивает уменьшение влияния дрейфа значений величин, а также статическую независимость результатов опыта между собой.

Выводы

Планирование и обработка эксперимента осуществляется в кодированных величинах. Формула кодирования имеет вид:

$$x_i = \frac{X_i - X_i^0}{h_i},$$

где x_i - кодированный фактор;

X_i - значение фактор;

X_i^0 - основной уровень фактора;

h_i - интервал варьирования фактора.

Называют:

1. Основной уровень фактора X_i^0 – значение фактора относительно, которого он изменяется в заданном эксперименте.

$$X_i^0 = \frac{X_{ie} + X_{in}}{2}$$

2. Интервал варьирования фактора h_i – половина диапазона, в котором изменяется фактор:

$$h_i = \frac{X_{ie} - X_{in}}{2},$$

где X_{ie} - верхнее значение фактора;

X_{in} - нижнее значение фактора.

Двухуровневый факторный эксперимент – это такой эксперимент – в котором фактор варьируется на двух уровнях, принимая только нижнее X_{in} и X_{ie} верхнее значения.

При двухуровневом эксперименте кодированные факторы x_i имеют два значения: -1 ; $+1$. В этом случае интервал варьирования всех факторов равен 1.

1. В качестве основного уровня варьирования фактора выбирают номинальное или расчетное значения центра области эксперимента.

2. Интервал варьирования определяет размер области эксперимента.

3. Интервал варьирования выбирают на порядок больше среднеквадратического отклонения величины

4. Результаты кодирования факторов заносят в **таблицу условий эксперимента**

Значение факторов	X_1	X_2	...	X_n
Основной уровень				
Интервал варьирования				
Верхний уровень				
Нижний уровень				

Натуральное значение фактора				
Кодированное значение фактора				

Многофакторные эксперименты описываются полиномиальными моделями. Это связано с тем, что исследуемые функции нескольких переменных в области эксперимента могут быть разложены в ряд Тейлора.

На практике рассматривается модель обычно как полином первого, реже второго порядка.

Это линейная модель вида:

$$y \approx b_0 + b_1 \cdot x_1 + b_2 \cdot x_2 + \dots + b_k \cdot x_k$$

Ее можно записать в виде:

$$y \approx b_0 + \sum_{i=1}^k b_i \cdot x_i$$

По аналогии для квадратичной модели (модели второго порядка) можно записать:

$$y \approx b_0 + \sum_{i=1}^k b_i \cdot x_i + \sum_{i=1}^k b_{ii} \cdot x_{ii} + \sum_{i=1}^k \prod_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^k b_{ij} \cdot x_i \cdot x_j$$

Для двух уровневых эксперимента общее число опытов равно:

$$2^k$$

где k – число факторов.

Если в опыте используется только верхний и нижний уровни фактора, то кодированные значения факторов будут соответственно равны +1 и -1.

Матрица планирования эксперимента – это условная запись значений кодированных величин, где строки соответствуют различным опытам, а столбцы значениям факторов.

Матрицы планирования эксперимента обладают тремя важными свойствами:

Симметрии – все наборы факторов симметричны относительно центра плана, или сумма элементов любого столбца матрицы планирования равна нулю:

$$\sum_{u=1}^N x_{iu} = 0, \quad i=1, 2, \dots, k.$$

Нормировки – сумма квадратов элементов любого столбца равна количеству строк:

$$\sum_{u=1}^N x_{iu}^2 = N, \quad i=1, 2, \dots, k.$$

Ортогональности – сумма произведений элементов любых двух столбцов равна нулю:

$$\sum_{u=1}^N x_{iu} \cdot x_{ju} = 0, \quad i \neq j; \quad i, j = 1, 2, \dots, k.$$

План эксперимента должен указывать количество параллельных опытов:

$$n \geq \frac{\sigma_y^2}{\sigma_{\bar{y}}^2}$$

где σ_y^2 - среднеквадратическое отклонение одного наблюдения;

$\sigma_{\bar{y}}^2$ - среднеквадратическое отклонение выборочного среднего n наблюдений.

План эксперимента должен указывать последовательность проведения опытов определяемых рандомизацией.

Рандомизация - означает случайный порядок проведения опытов.

Рандомизация обеспечивает уменьшение влияния дрейфа значений величин, а также статическую независимость результатов опыта между собой.

Вопросы

1. В каких величинах осуществляется кодирование и обработка эксперимента
2. Запишите формулу кодирования
3. Что такое основной уровень фактора
4. Что такое интервал варьирования фактора
5. Какой эксперимент называют двухуровневым
6. Какие значения имеют кодированные факторы в двухуровневом эксперименте
7. Чему равен интервал варьирования факторов
8. Что выбирают в качестве основного уровня варьирования фактора
9. Что определяет интервал варьирования
10. Каким выбирают интервал варьирования
11. Куда записывают результаты кодирования факторов
12. Какими моделями описываются многофакторные эксперименты
13. Почему для записи моделей используют полиномы
14. Какого порядка полиномы используют на практике для описания моделей
15. Запишите линейную модель
16. Запишите квадратичную модель
17. Чему равно общее число опытов для двух уровневых экспериментов
18. Что такое матрица планирования эксперимента
19. Перечислите свойства матрицы планирования эксперимента

20. Как записать симметрию
21. Как записать нормировку
22. Как записать ортогональность
23. Как определить количество параллельных опытов
24. Что такое рандомизация
25. Что обеспечивает рандомизация

Планирование эксперимента

Тема 19

Дробный факторный эксперимент

Взаимодействие высоких порядков.

При проведении полного факторного пространства в N точках факторного пространства можно построить $N=2^k$ коэффициентов b уравнения регрессии, где k – количество факторов. Например:

$$N=2, k=1 \quad y=b_0+b_1x_1$$

$$N=4, k=2 \quad y=b_0+b_1x_1+b_2x_2+b_{12}x_1x_2$$

$$N=8, k=3 \quad y=b_0+b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3+b_{12}x_1x_2+b_{13}x_1x_3+b_{23}x_2x_3+b_{123}x_1x_2x_3$$

В этих уравнениях коэффициенты b при произведениях факторов характеризуют влияние на модель взаимодействия факторов. Если такие факторы являются взаимно независимыми, то и взаимодействие их на модель должно быть незначительным. Практика показала, что при $k \geq 4$, эффекты взаимодействия высокого порядка являются не большими. Следовательно, влияние сомножителей $x_1x_2x_3 \dots x_k$ на y является статически незначительным. Это позволяет, в уравнениях регрессии, не учитывать все коэффициенты с большим числом факторов.

ВЫВОД. При большом количестве факторов можно строить различные планы экспериментов, в которых можно учитывать единичные факторы (линейные эффекты), двойные, тройные и т.д.:

$$y=b_0+b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3+b_{12}x_1x_2+b_{13}x_1x_3+b_{23}x_2x_3+b_{123}x_1x_2x_3$$

$$y=b_0+b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3+b_{12}x_1x_2+b_{13}x_1x_3+b_{23}x_2x_3$$

$$y=b_0+b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3$$

Уменьшение количества отыскиваемых коэффициентов сокращает расходы на проведение экспериментов и обработку результатов.

Количество различных коэффициентов в уравнении регрессии может быть посчитано через выражение:

$$C_k^m$$

где m – количество совместных факторов.

Например:

$$\text{При } k=3 \text{ имеем } N = C_3^0 + C_3^1 + C_3^2 + C_3^3 = \frac{3!}{0!3!} + \frac{3!}{1!2!} + \frac{3!}{2!1!} + \frac{3!}{3!0!} = \\ = 1 + 3 + 3 + 1 = 8$$

Если считать, что объем работы пропорционален количеству определяемых коэффициентов, то при выборе модели с меньшим количеством коэффициентов необходимо меньше затрат.

ВЫВОД. В экспериментах с большим количеством факторов число определяемых коэффициентов может быть значительно меньше количества опытных точек. Следовательно, возникает задача построения таких экспериментов, в которых количество точек немного больше или равно количеству определяемых коэффициентов.

Понятие дробной реплики

Так как полный факторный эксперимент требует большого числа опытов но не все опыты при этом являются информативными, то их можно было бы и не проводить. Для таких случаев разработаны дробные факторные эксперименты. Дробный факторный эксперимент позволяет сократить число опытов, но при этом получить основной объем информации.

Опр. Эксперимент, составляющий по объему только часть полного факторного эксперимента, называется **дробной репликой** или дробным факторным экспериментом.

Запись дробного факторного эксперимента имеет вид: 2^{k-p} , где k - общее число факторов эксперимента; p - число факторов, введенных путем замены незначимых взаимодействий.

Называют:

$$2^{k-1} \text{ – полуреплика, так как } 2^{k-1} = \frac{1}{2} 2^k;$$

$$2^{k-2} \text{ – } \frac{1}{4} \text{ реплики, так как } 2^{k-2} = \frac{1}{4} 2^k;$$

$$2^{k-3} \text{ – } \frac{1}{8} \text{ реплики, так как } 2^{k-3} = \frac{1}{8} 2^k;$$

При построении эксперимента, разработчик может не знать о взаимодействиях факторов. В этом случае нужно уметь определить возможные взаимодействия факторов. Следовательно, нужно определить разрешающую способность дробных реплик. Для этого вводят понятия:

- определяющие контрасты;
- генерирующие соотношения.

ПРИМЕР. Рассмотрим полуреплику 2^{3-1} .

Для полного факторного эксперимента необходимы факторы: X_1 , X_2 , X_3 .

Для полуреплики можно выбрать взаимодействие двух факторов как фактор. При этом возможны два варианта:

$$X_3 = X_1 X_2 \text{ и } X_3 = -X_1 X_2$$

Эти полуреплики могут быть представлены следующими планами

№ опыта	$X_3 = X_1 X_2$				№ опыта	$X_3 = -X_1 X_2$			
	X_1	X_2	X_3	$X_1 X_2 X_3$		X_1	X_2	X_3	$X_1 X_2 X_3$
1	+	+	+	+	1	+	+	-	-
2	-	+	-	+	2	-	+	+	-
3	+	-	-	+	3	+	-	+	-
4	-	-	+	+	4	-	-	-	-

Для приведенного плана основными знаками факторов, являются знаки X_1 , X_2 . Знаки всех остальных совокупностей факторов определяются простым умножением значений кодированных факторов.

Явление смешивание оценок b -коэффициентов.

Для определения разрешающей способности дробных реплик вводят понятия определяющих контрастов и генерирующих соотношений.

Опр. Произведение столбцов матриц, равные +1 или -1, называются определяющими контрастами.

Контраст позволяет найти смешанные эффекты.

ПРАВИЛО. Чтобы найти, какой эффект смешан с данным, нужно умножить обе части определяющего контраста на столбец, соответствующий данному эффекту.

НАПРИМЕР.

$$X_1 = X_1^2 X_2 X_3 = X_2 X_3$$

$$X_2 = X_1 X_2^2 X_3 = X_1 X_3$$

$$X_3 = X_1 X_2 X_3^2 = X_1 X_2$$

Это значит, что коэффициенты линейного уравнения будут оценками линейных эффектов:

$$B_1 \rightarrow \beta_1 + \beta_{23}$$

$$B_2 \rightarrow \beta_2 + \beta_{13}$$

$$B_3 \rightarrow \beta_3 + \beta_{12}$$

Опр. Соотношение, показывающее, с каким из эффектов смешан данный эффект, называется генерирующим соотношением.

Выводы

При проведении полного факторного пространства в N точках факторного пространства можно построить $N=2^k$ коэффициентов b уравнения регрессии, где k – количество факторов.

Коэффициенты b при произведениях факторов характеризуют влияние на модель взаимодействия факторов.

Практика показала, что при $k \geq 4$, эффекты взаимодействия высокого порядка являются небольшими.

Незначительное влияние сомножителей $x_1x_2x_3\dots x_k$ на y позволяет, в уравнениях регрессии, не учитывать все коэффициенты с большим числом факторов.

Уменьшение количества отыскиваемых коэффициентов сокращает расходы на проведение экспериментов и обработку результатов.

Количество различных коэффициентов в уравнении регрессии может быть посчитано через выражение:

$$C_k^m$$

где m -количество совместных факторов.

Опр. Эксперимент, составляющий по объему только часть полного факторного эксперимента, называется **дробной репликой** или дробным факторным экспериментом.

Запись дробного факторного эксперимента имеет вид: 2^{k-p} , где k - общее число факторов эксперимента; p - число факторов, введенных путем замены незначимых взаимодействий.

Для плана эксперимента различают основные факторы, определяющие знаки всех остальных совокупностей факторов.

Опр. Произведение столбцов матриц, равные $+1$ или -1 , называются определяющими контрастами.

Контраст позволяет найти смешанные эффекты.

ПРАВИЛО. Чтобы найти, какой эффект смешан с данным, нужно умножить обе части определяющего контраста на столбец, соответствующий данному эффекту.

Опр. Соотношение, показывающее, с каким из эффектов смешан данный эффект, называется генерирующим соотношением.

Вопросы

1. Сколько можно построить коэффициентов при проведении полного факторного эксперимента
2. Что характеризуют коэффициенты b
3. При каких значениях k эффекты взаимодействия высокого порядка являются небольшими.
4. Что позволяет сделать незначительное влияние сомножителей $x_1x_2x_3\dots x_k$ на y в уравнениях регрессии

5. Для чего стремятся уменьшить количество коэффициентов в уравнении регрессии
6. Как можно посчитать количество различных коэффициентов в уравнении регрессии
7. Какой эксперимент называется дробной репликой или дробным факторным экспериментом.
8. Как записывают дробный факторный эксперимент
9. Что такое основные факторы дробного эксперимента
10. Что такое определяющие контрасты
11. Что позволяет найти контраст
12. Как найти какой эффект смешан с данным
13. Что такое генерирующее соотношение

Планирование эксперимента

Тема 20

Обработка результатов многофакторного эксперимента Основная задача обработки результатов эксперимента.

После планирования производится сам эксперимент. При этом, нужно учитывать, что результаты каждого опыта обладают статистической неопределенностью. Причины ее возникновения:

- погрешности измерения значений факторов;
 - погрешности измерения значений отклика;
 - влияние неучтенных факторов
- и т.д.

Поэтому при воспроизведении опыта несколько раз в одной и той же точке значения отклика могут быть разными. Обычно стараются проводить в каждой точке несколько опытов и потом переходить к оценкам полученных величин.

Основная задача обработки:

- оценка параметров принятой модели;
- проверка гипотезы о адекватности модели (соответствия) экспериментальным данным.

Обработка эксперимента опирается на методы математической статистики.

Основная задача обработки эксперимента можно представить как набор частных задач вида:

1. Оценка математического ожидания и дисперсии отклика в отдельных точках факторного пространства $u = 1, 2, \dots, N$.
2. Исключения грубых ошибок (проверка однородности статистического материала)
3. Проверка однородности построчной дисперсии.

4. Проверка дисперсии воспроизводимости.
5. Определение b-коэффициентов.
6. Проверка статистической значимости b-коэффициентов.
7. Проверка адекватности модели.

Оформление результатов эксперимента.

Результаты эксперимента оформляют в виде таблички, которая содержит план эксперимента и полученные значения отклика. Будем предполагать, что во всех точках факторного пространства проводится одинаковое количество опытов. Здесь же в табличке можно записывать и результаты обработки эксперимента (10-11).

Номер Набора u	x_{1u}	x_{2u}	...	x_{ku}	y_{u1}	y_{u2}	...	y_{un}	\bar{y}_u	S_u^2
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	-	-	...	-	y_{11}	y_{12}	...	y_{1n}		
2	+	-	...	-	y_{21}	y_{22}	...	y_{2n}		
.		
.		
u	-	+	...	+	y_{u1}	y_{u2}	...	y_{un}		
.		
.		
.		
N	+	+	...	+	y_{N1}	y_{N2}	...	y_{Nn}		

1. Оценка математического ожидания и дисперсии отклика в отдельных точках факторного пространства

$u = 1, 2, \dots, N$.

Оценка математического ожидания и дисперсии отклика в отдельных точках факторного пространства выполняется через вычисление построчных средних \bar{y}_u и дисперсий S_u^2 , которые равны:

$$\bar{y}_u = \frac{1}{n} \cdot \sum_{j=1}^n y_{uj};$$

$$S_u^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \left(\sum_{j=1}^n y_{uj}^2 - n \cdot \bar{y}_u^2 \right)$$

2. Проверка однородности статистического материала

Грубые ошибки искажают результаты эксперимента и должны быть исключены. Наиболее распространенный способ исключения грубых ошибок – это r -критерий. Его алгоритм:

1. Данные строки располагаются в возрастающем порядке:

$$y_{u1} < y_{u2} < \dots < y_{un}$$

2. Одно из крайних значений (например y_{u1} или y_{un}) считается промахом, если оно далеко расположено от всех остальных.

3. Проверяется основная статистическая гипотеза H_0 : y_{u1} принадлежит основной совокупности. Альтернативной является гипотеза H_1 : y_{u1} не принадлежит основной совокупности.

Для проверки H_0 определяется расчетное значение это r -критерия:

$$r_{\min} = \frac{\bar{y}_u - y_{u1}}{S_u \cdot \sqrt{n(n-1)}}$$

или

$$r_{\max} = \frac{y_{un} - \bar{y}_u}{S_u \cdot \sqrt{n(n-1)}}$$

Величина r -критерия ($r_{кр}$) по числу степеней свободы $f_u = n-1$ и уровню значимости α берется из таблиц r -распределений.

Если:

$r_{\min}, r_{\max} < r_{кр}$ то гипотеза H_0 принимается с надежностью вывода $P=1-\alpha$, т.е. сомнительное крайнее значение отклика считается принадлежащим упорядоченному ряду значений. В противном случае сомнительное крайнее значение отбрасывается. Это приводит к тому, что количество опытов становится разным для различных точек. В свою очередь это приводит к нарушению условия ортогональности плана эксперимента, что затрудняет использование метода наименьших квадратов. В избежания этого можно или удалить весь столбец В котором обнаружено сомнительное значение или провести дополнительный опыт.

3. Проверка однородности построчной дисперсии.

Под однородностью оценок дисперсий $S_1^2, S_2^2, \dots, S_N^2$ понимают, что все эти величины являются оценками одной и той же дисперсии σ_y^2 , которая называется дисперсией воспроизводимости или дисперсией опыта. Различие этих величин в этом случае объясняется их случайным характером.

Проверка однородности построчной дисперсии обеспечивает проверку равной точности измерений откликов во всех строках плана. Для этого может быть использован:

1. F-критерий
2. Критерий Кохрена G
3. Критерий Бартлетта

Критерий Кохрена. Используется для проверки однородности построчной дисперсий, когда число параллельных опытов во всех строках постоянно ($n = \text{const}$):

$$G_p = \frac{S_{u \max}^2}{\sum_{u=1}^N S_u^2}$$

где $S_{u \max}^2$ - наибольшая построчная дисперсия.

По степеням свободы $f_u = n - 1$, $f_z = N$ и уровню значимости α находят $G_{кр}$. Гипотеза об однородности дисперсий принимается, если выполняется неравенство $G_p < G_{кр}$.

F-критерий. Выбирается наибольшая $S_{u \max}^2$ и $S_{u \min}^2$ наименьшая дисперсии. Отношение наибольшей дисперсии к наименьшей представляет собой критерий Фишера F :

$$F_p = \frac{S_{u \max}^2}{S_{u \min}^2}$$

По аналогии с предыдущим по степеням свободы $f_u = n - 1$, $f_z = N$ и уровню значимости α находят $F_{кр}$. Гипотеза об однородности дисперсий принимается, если выполняется неравенство: $F_p < F_{кр}$.

Планирование эксперимента
Тема 21

Обработка результатов многофакторного эксперимента (Продолжение)

4. Проверка дисперсии воспроизводимости.

Дисперсия воспроизводимости S_y^2 характеризует ошибку опыта, где за ошибку опыта принимают среднеквадратическое отклонение отклика:

$$\sigma_y = \sqrt{S_y^2}.$$

При выполнении условия однородности построчных дисперсий S_u^2 дисперсия воспроизводимости может быть определена следующими вариантами:

1. В каждой строке проведено несколько параллельных опытов ($n > 1$). В этом случае:

$$S_y^2 = \frac{1}{N} \cdot \sum_{u=1}^N S_u^2 = \frac{1}{N(n-1)} \cdot \sum_{u=1}^N \left(\sum_{j=1}^n y_{uj}^2 - n\bar{y}_u^2 \right)$$

2. В строках существуют точки, где проведены по одному опыту ($n=1$). В этом случае выбирают точку где проведен ряд параллельных опытов (например в центре плана, где $n=n_o$) и дисперсию воспроизводимости определяют по выражению:

$$S_y^2 = \frac{1}{n_o - 1} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n_o} Y_{oi}^2 - n\bar{y}_o^2 \right),$$

где $\bar{y}_o = \frac{1}{n_o} \cdot \sum_{i=1}^{n_o} Y_{oi}$

3. При одинаковых значениях откликов для повторных по метрологическим характеристикам измерительных приборов может быть сразу определено среднеквадратическое отклонение отклика σ_y . В этом случае, так как случайная ошибка прибора подчиняется нормальному закону распределения, и с вероятностью $P_r=0.9973$ выполняется условие $-3\sigma_y \leq y \leq 3\sigma_y$, можно использовать зависимость:

$$\sigma_y = \frac{\hat{A}_{\text{шк}} \cdot \hat{E}}{300}$$

, где $A_{\text{шк}}$ – предел измерения прибора; K – класс точности прибора (в процентах).

5. Определение b-коэффициентов.

Обработка результатов эксперимента для получения модели проводится в кодированных величинах. По результатам эксперимента находят значения коэффициентов по формуле:

$$b_i = \frac{1}{N} \cdot \sum_{u=1}^N x_{iu} \cdot \bar{y}_u$$

где x_{iu} – кодированные факторы и их взаимодействия.

ЗАМЕЧАНИЕ.

1. Приведенное выражение определяет b – коэффициенты как статически независимые величины. Это позволяет количество b-коэффициентов при необходимости изменять (или уменьшать или увеличивать). Это свойство связано с ортогональностью матрицы плана эксперимента.

2. Среди определяемых b-коэффициентов могут быть и статистически незначимые, которые не несут основную информацию об объекте. По этому их можно отбрасывать.

6. Проверка статистической значимости b-коэффициентов.

Проверка значимости b коэффициентов проводится по критерию Стьюдента. Возможны несколько вариантов.

Первый вариант.

1. Определяется оценка ошибок коэффициентов регрессии S_{bi}^2 выражением вида:

$$S_{bi}^2 = \frac{\sigma_y^2}{Nn};$$

2. Вычисляются наблюдаемые значения критериев Стьюдента:

$$t_{pi} = \frac{|b_i|}{S_{bi}} = \frac{|b_i| \cdot N \cdot n}{\sigma_y}.$$

3. Определяется число степеней свободы f_y дисперсии воспроизводимости S_y^2 . Величина f_y зависит от способа определения S_y^2 и будет рассмотрена ниже.

4. Выбирается уровень значимости α (обычно α выбирается равным 0.05).

5. По таблице критических точек распределения Стьюдента, по заданному уровню значимости α , и числу степеней свободы f_y находят критические точки $t_{\text{крит.кр}}(\alpha/2, f_y)$.

6. Проводится анализ расчетного и заданного критериев Стьюдента. Если $|t_{pi}| > t_{\text{крит.кр}}(\alpha/2, f_y)$ – нулевую гипотезу отвергают и в этом случае b-коэффициент считается значимым.

Если $|t_{pi}| < t_{\text{крит.кр}}(\alpha/2, f_y)$ – нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу и в этом случае b-коэффициент считается равным нулю.

Второй вариант.

На практике для сокращения количества счета рассчитывают $b_{кр}$. Все коэффициенты меньше $b_{кр}$, считаются равными нулю. При этом, принимают:

$$b_{\text{кр}} = S_{bi} \cdot t_{\text{крит.кр}}(\alpha/2, f_y)$$

Третий вариант.

Если известны дисперсии b-коэффициентов, σ_{bi}^2 , можно воспользоваться распределением Стьюдента, задав число степеней свободы $t_y = \infty$. Тогда принимаются равными нулю все коэффициенты для которых выполняется:

$b_i \leq \sigma_{bi} \cdot z_{\alpha/2}$, где $z_{\alpha/2}$ – является параметром интегральной формулы Лапласа:

$$\Phi(z) = 1 - \alpha$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Интегральная теорема Лапласа записывается в виде:

$$P(|Z| \leq z) = \Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-z}^z e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

Но по определению доверительной вероятности можно принять:

$$P(|Z| \leq z) = 1 - \alpha$$

7. Проверка адекватности модели.

Полученная в результате обработки эксперимента поверхность отклика из за того, что некоторые коэффициенты могут быть незначимыми, может не проходить через все заданные факторные точки. Но даже если поверхность и проходит через все точки, то это еще не является доказательством ее адекватности. Понимание адекватности является условным и может зависит даже от выбора критерия адекватности. То есть модель по одним выбранным критериям может быть адекватной, а по другим нет.

Критерий Фишера. Проверяется сравнение двух видов рассеивания. Сравнивается рассеивание экспериментальных точек \bar{y}_{ij} относительно построчных средних \bar{y}_u и разброс построчных средних \bar{y}_u относительно предсказанной по уравнению регрессии поверхности отклика y_u . Модель считается адекватной статистическому материалу, если рассеивание точек \bar{y}_u относительно модели \hat{y}_u будет таким же, как рассеивание точек \bar{y}_{ij} относительно \bar{y}_u . Так как рассеивание характеризуется дисперсией, то сравнение рассеиваний заменяется сравнением соответствующих дисперсий.

Расчетное значение критерия вычисляется по формуле

$$F_{расч} = \frac{S_{\hat{a}\hat{a}}^2}{S_y^2}$$

Где предполагается, что $S_{\hat{a}\hat{a}}^2 > S_y^2$.

Здесь:

$$S_{\hat{a}\hat{a}}^2 = \frac{n \sum_{u=1}^N (\bar{y}_u - \hat{y}_u)^2}{N - l} - \text{оценка дисперсии адекватности. Где } l - \text{ количество}$$

коэффициентов модели;

$$S_y^2 = \frac{1}{N(n-1)} \sum_{u=1}^N \sum_{j=1}^n (y_{uj} - \bar{y}_u)^2 - \text{оценка дисперсии воспроизводимости.}$$

Критическое значение $F_{кр}$ для уровня значимости α и чисел степеней свободы:

$$\begin{aligned} f_{ад} &= N - l \\ f_y &= N(n - 1) \end{aligned}$$

подбирается по таблице. Если $F_{расч} < F_{кр}$, гипотеза об адекватности модели принимается. Если модель не адекватна, необходимо поставить новый эксперимент. Достижения адекватности при этом можно достичь за счет:

- уменьшения интервалов варьирования факторов;
- рандомизации опыта;
- стабилизацией условий эксперимента;
- переход к функциям отклика вида $\ln \bar{y}$ или $\sqrt{\bar{y}}$;
- включение в модель квадратов или более высоких степеней факторов (то есть перейти к планированию второго порядка).

ЗАМЕЧАНИЕ. Адекватность по критерию Фишера основана на условностях:

- 1.Количество параллельных опытов n больше единицы.
- 2.Количество коэффициентов модели меньше количества опытов: $l < N$.

Планирование эксперимента
Тема 22

Обработка результатов многофакторного эксперимента (Продолжение)

Дополнительные методы проверки адекватности модели.

Как было уже отмечено, адекватность по критерию Фишера основана на определенных условностях (количество параллельных опытов $n > 1$ и количество коэффициентов модели меньше количества опытов: $l < N$).

Кроме этого можно выделить еще случаи:

- $n > 1$ и $l = N$;
- $n = 1$ и $l < N$;
- проверка адекватности модели по данным технического задания.

1.1.Количество параллельных опытов $n > 1$ и количество коэффициентов модели равно количеству опытов: $l = N$.

Для этих условий степень свободы $f_{ад} = N - l = 0$ и воспользоваться выражением:

$$S_{\hat{x}_i}^2 = \frac{n \sum_{u=1}^N (\bar{y}_u - \hat{y}_u)^2}{N - l}$$

нельзя. В этом случае об адекватности можно судить по отклонению отклика в центре плана, где $x_i = 0$.

Алгоритм определения адекватности.

1. Проведя n_0 количество параллельных опытов в центре плана, считают оценку дисперсии отклика в центре плана:

$$S_{\bar{y}}^2 = \frac{1}{n_0 - 1} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n_0} Y_i^2 - n_0 \bar{y}_{\bar{y}}^2 \right),$$

где среднее значение (оценка математического ожидания) равна:

$$\bar{y}_{\bar{y}} = \frac{1}{n_0} \cdot \sum_{i=1}^{n_0} Y_i$$

а степень свободы в центре плана: $f_{\bar{y}} = n_0 - 1$.

2. Определяют оценку дисперсии воспроизводимости:

$$S_y^2 = \frac{1}{N(n-1)} \sum_{u=1}^N \sum_{j=1}^n (y_{uj} - \bar{y}_u)^2.$$

3. Подсчитывают оценку дисперсии отклонения:

$$S_\varepsilon^2 = \frac{N(n-1)S_y^2 + (n_0 - 1)S_{\bar{y}}^2}{N(n-1) + n_0 - 1} \cdot \frac{N \cdot n + n_0}{N \cdot n \cdot n_0}$$

4. Считают статистическую значимость отклонения в центре плана:

$$\varepsilon_{\bar{y}} = \bar{y}_{\bar{y}} - b_0$$

5. Определяют расчетное значение критерия Стьюдента:

$$t_{\text{данн.}} = \frac{\varepsilon_{\bar{y}}}{\sqrt{S_\varepsilon^2}}$$

6. Для выбранного уровня значимости α и чисел степеней свободы: $f = N(n-1) + n_0 - 1$ определяется критическое или табличное значение критерия Стьюдента:

$$t_{\text{кр}} = t_{\text{табл.}}(\alpha, f)$$

7. Проводится анализ адекватности. Если:

$t_{\text{расч.}} < t_{\text{кр.}}$, модель адекватна с надежностью вывода $(1 - \alpha)$

$t_{\text{расч.}} > t_{\text{кр.}}$, модель неадекватна на уровне значимости α .

Дополнение. Для представленного алгоритма считают, что дисперсия отклика в опытных точках σ_y^2 и в центре плана $\sigma_{\bar{y}}^2$ равны:

$$\sigma_y^2 = \sigma_{\bar{y}}^2 = \sigma^2 = \frac{1}{N(n-1)} \sum_{u=1}^N \left(\sum_{j=1}^n y_{uj}^2 - n \bar{y}_u^2 \right)$$

Кроме этого:

Дисперсия b_0 – коэффициента	$\sigma_{b_0}^2$	$\frac{\sigma^2}{N \cdot n}$
Дисперсия среднего значения отклика в центре плана	$\sigma_{\bar{y}}^2$	$\frac{\sigma_{\bar{y}}^2}{n_0} = \frac{\sigma^2}{n_0}$
Дисперсия отклонения отклика в центре плана	σ_ε^2	$\sigma_{\bar{y}}^2 + \sigma_{b_0}^2$

Обобщенная (взвешенная) оценка дисперсии воспроизводимости	S^2	$\frac{f_y S_y^2 + f_{\bar{o}.i} S_{\bar{o}.i}^2}{f_y + f_{\bar{o}.i}}$
Подсчитывают оценку дисперсии отклонения:	S_ε^2	$\frac{N \cdot n + n_0}{N \cdot n \cdot n_0} \cdot S^2$

Где n_0 - количество параллельных опытов в центре плана, n – количество параллельных опытов в каждой точке плана, кроме центра равные между собой.

1.2. Частный случай для $n > 1$ и $l=N$. (количество опытов в центре плана мало, а произведение nN - , большое.

В этом случае можно использовать приближенные формулы для подсчета оценки дисперсии отклонения:

$$S_\varepsilon^2 = \frac{S_{\bar{o}.i}^2}{n_0}$$

и число степеней свободы: $f_\varepsilon = n_0 - 1$. Тогда алгоритм будет иметь следующее содержание.

1. Оценка дисперсии отклика в центре плана:

$$S_{\bar{o}.i}^2 = \frac{1}{n_0 - 1} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n_0} Y_i^2 - n_0 \bar{y}_{\bar{o}.i}^2 \right),$$

где:

$$\bar{y}_{\bar{o}.i} = \frac{1}{n_0} \cdot \sum_{i=1}^{n_0} Y_i$$

а степень свободы в центре плана: $f_{\bar{o}.i} = 1 - n_0$.

2. Оценка дисперсии отклонения:

$$S_\varepsilon^2 = \frac{S_{\bar{o}.i}^2}{n_0}$$

3. Статистическая значимость отклонения в центре плана:

$$\varepsilon_{\bar{o}.i} = \bar{y}_{\bar{o}.i} - b_0$$

4. Расчетное значение критерия Стьюдента:

$$t_{\text{дан}} = \frac{\varepsilon_{\bar{o}.i}}{\sqrt{S_\varepsilon^2}}$$

6. Для выбранного уровня значимости α и чисел степеней свободы: $f = n_0 - 1$ определяется критическое или табличное значение критерия Стьюдента:

$$t_{кр} = t_{\text{табл.}}(\alpha, f)$$

7. По аналогии с предыдущим проводится анализ адекватности.

ЗАМЕЧАНИЕ. Для случая $n = 1$ и $l=N$ приближенный расчет является единственно возможным.

2. Количество параллельных опытов $n = 1$ и количество коэффициентов модели меньше количества опытов: $l < N$.

В этом случае нельзя определить оценку дисперсии воспроизводимости:

$$S_y^2 = \frac{1}{N(n-1)} \sum_{u=1}^N \sum_{j=1}^n (y_{uj} - \bar{y}_u)^2$$

и проверку адекватности проводят по критерию Фишера.

1. Проведя n_0 количество параллельных опытов в центре плана, считают оценку дисперсии отклика:

$$S_{\bar{y}}^2 = \frac{1}{n_0 - 1} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n_0} Y_i^2 - n_0 \bar{y}_{\bar{y}}^2 \right),$$

где среднее значение (оценка математического ожидания) равна:

$$\bar{y}_{\bar{y}} = \frac{1}{n_0} \cdot \sum_{i=1}^{n_0} Y_i$$

а степень свободы в центре плана: $f_{\bar{y}} = n_0 - 1$.

2. Определяют оценка дисперсии адекватности:

$$S_{\hat{y}}^2 = \frac{\sum_{u=1}^N (\bar{y}_u - \hat{y}_u)^2}{N - l},$$

где l – количество коэффициентов модели;

3. Определяют расчетный критерий Фишера:

$$F_{\delta \hat{y}} = \frac{S_{\hat{y}}^2}{S_{\bar{y}}^2}$$

4. Критическое значение $F_{кр}$ для уровня значимости α и чисел степеней свободы:

$$f_{\hat{y}} = N - l$$

$$f_{\bar{y}} = n_0 - 1$$

подбирается по таблице. Если $F_{расч} < F_{кр}$, гипотеза об адекватности модели принимается.

Проверка адекватности модели по данным технического задания.

В промышленности контроль качества модели определяется заданием предельно допустимого отклонения (как абсолютной погрешности) δ между предсказанным значением отклика y_u и его фактическим значением \hat{y}_u . То есть при заданном допуске модель считается адекватной, если выполняется условие:

$$|y_u - \hat{y}_u| \leq \delta.$$

Это условие должно выполняться для всех опытных точек: $u=1,2,\dots,N$.

Величину δ можно приближенно определить на основании погрешности факторных переменных X_i , как подсчет абсолютной погрешности для заданного регрессионного выражения.

Принятие решения

Так как математические модели необходимы для:

- 1) изучения моделируемого явления;
 - 2) совершенствования моделируемой системы;
 - 3) прогнозирования поведения моделируемого объекта,
- то после построения регрессионной модели должны быть приняты определенные решения.

Для первой задачи требуется определить влияние отдельных факторов и их совокупности на значение отклика. Это определяется знаком и величиной коэффициентов регрессии b_i .

Прогнозирование поведения модели представляет собой определенные сложности с точки зрения оценки точности этого прогноза. Эта точность также требует прогнозирования и даже для линейных моделей она характеризуется квадратной зависимостью.

Наиболее распространенная задача – это задача совершенствования или оптимизации заданной модели. В том случае считают, что модель – это полином, коэффициенты которого представляют собой частные производные относительно заданных переменных. При анализе необходимо учитывать следующие обстоятельства:

1. Коэффициенты модели. Если ищется максимум функции, то необходимо увеличение положительных коэффициентов модели, если минимум – то его уменьшению способствует увеличение отрицательных коэффициентов по модулю. Незначимые коэффициенты можно не учитывать.
2. Интервал варьирования. Абсолютное значение коэффициентов регрессии возрастает с увеличением интервалов. Знаки линейных коэффициентов до экстремальных точек не меняются, но они могут измениться, если мы проскочим экстремум функции.
3. Эффекты взаимодействия. Если эффект взаимодействия двух факторов имеет положительный знак, то для увеличения значения функции необходимо одновременное увеличение или уменьшение значений факторов, а для уменьшения значения функции значения факторов должны одновременно изменяться в разных направлениях. Если эффект взаимодействия двух факторов имеет отрицательный знак, то для увеличения значения функции значения факторов должны одновременно изменяться в разных направлениях, а для уменьшения значения функции, необходимо одновременное увеличение или уменьшение значений факторов.

Учет такого количества обстоятельств порождает множество возможных вариантов для построения оптимальной модели. Поэтому разработаны специальные методы оптимизации регрессионных моделей.

Различают:

1. Линейное программирование. Занимается вопросом оптимизации линейных моделей.
2. Нелинейное программирование. Занимается вопросами оптимизации нелинейных моделей.

Аналитические методы оптимизации желательно использовать к аналитическим моделям, построенным теоретическим путем с точки зрения физических законов. В этом случае вводится набор допущений, который может значительно снизить точность модели.

Для регрессионных моделей используются экспериментальные методы оптимизации. Они не требуют упрощения моделей. Такая оптимизация может поводиться по одному или нескольким откликам, но как правило справедлива только для ограниченной области эксперимента.

Основными методами экспериментальной оптимизации являются:

- метод градиента;
- планирование второго порядка.

Планирование эксперимента
Тема 23

Выводы по вопросам обработки многофакторного эксперимента

Причины возникновения статистической неопределенности результатов опыта:

- погрешности измерения значений факторов;
- погрешности измерения значений отклика;
- влияние неучтенных факторов и др.

Проведение в каждой точке несколько опытов позволяет построить оценки полученных величин.

Результаты эксперимента оформляют в виде таблички, которая содержит план эксперимента и полученные значения отклика. Табличка может содержать и результаты обработки эксперимента.

Основная задача обработки эксперимента содержит:

1. Оценку математического ожидания и дисперсии отклика в отдельных точках факторного пространства.
2. Исключения грубых ошибок
3. Проверка однородности построчной дисперсии.
4. Проверка дисперсии воспроизводимости.
5. Определение b -коэффициентов.

6. Проверка статистической значимости b-коэффициентов.

7. Проверка адекватности модели.

1. Оценка математического ожидания и дисперсии отклика в отдельных точках факторного пространства выполняется через вычисление построчных средних \bar{y}_u и дисперсий S_u^2 .

2. Грубые ошибки исключаются из результатов опыта с помощью r -критерия.

Расчетные значения критерия промаха равны:

$$r_{\min} = \frac{\bar{y}_u - y_{u1}}{S_u \cdot \sqrt{n(n-1)}} \quad \text{или} \quad r_{\max} = \frac{y_{un} - \bar{y}_u}{S_u \cdot \sqrt{n(n-1)}}$$

3. Проверка однородности построчной дисперсии обеспечивает проверку равной точности измерений откликов во всех строках плана.

Для проверки однородности построчной дисперсии могут быть использованы критерий Кохрена, и критерий Фишера.

4. Дисперсии воспроизводимости S_y^2 характеризует ошибку опыта.

Дисперсия воспроизводимости может быть определена:

- через вычисление S_y^2 при проведении в каждой строке параллельных опытов;

- через вычисление S_y^2 для точки, где проведен ряд параллельных опытов в случае существования точек с одним опытом;

- при одинаковых значениях откликов при повторных опытах среднеквадратическое отклонение отклика σ_y определяется по метрологическим характеристикам измерительных приборов:

$$\sigma_y = \frac{A_{\text{шк}} \cdot \hat{E}}{300},$$

где $A_{\text{шк}}$ – предел измерения прибора; K – класс точности прибора (в процентах).

5. b-коэффициентов определяются по зависимости:

$$b_i = \frac{1}{N} \cdot \sum_{u=1}^N x_{iu} \cdot \bar{y}_u$$

где x_{iu} – кодированные факторы и их взаимодействия.

Ортогональностью матрицы плана эксперимента позволяет при необходимости изменять количество b-коэффициентов без пересчета их значения и отбросить статистически незначимые коэффициенты, которые не несут основную информацию об объекте.

6. Проверка статистической значимости b-коэффициентов проводится по критерию Стьюдента.

Проверка статистической значимости b-коэффициентов может проводиться по $b_{кр}$:

$$b_{\text{ед}} = S_{bi} \cdot t_{\text{табл.ед}}(\alpha/2, f_y).$$

Все коэффициенты меньше $b_{кр}$, считаются равными нулю.

Если известны дисперсии b-коэффициентов σ_{bi}^2 , то принимаются равными нулю все коэффициенты которые меньше $\sigma_{bi} \cdot z_{\alpha}$, где z_{α} – параметр интегральной формулы Лапласа: $\Phi(z)=1-\alpha$.

7. Проверка адекватности модели может производиться
-по критерию Фишера:

$$F_{расч} = \frac{S_{\hat{a}}^2}{S_y^2}$$

-по расчетному значению критерия Стьюдента:

$$t_{\hat{a}} = \frac{\varepsilon_{\hat{a}}}{\sqrt{S_{\varepsilon}^2}}$$

Адекватность модели можно достичь за счет:

- уменьшения интервалов варьирования факторов;
- рандомизации опыта;
- стабилизацией условий эксперимента;
- переход к функциям отклика вида $\ln \bar{y}$ или $\sqrt{\bar{y}}$;
- включение в модель квадратов или более высоких степеней факторов (то есть перейти к планированию второго порядка).

Для $n > 1$ и $l=N$. (количество опытов в центре плана мало, а произведение nN - , большое) используют приближенные формулы для подсчета оценки дисперсии отклонения:

$$S_{\varepsilon}^2 = \frac{S_{\hat{a}}^2}{n_0}$$

А дальше используя критерия Стьюдента проводится анализ адекватности, взяв в качестве числа степени свободы: $f = n_0 - 1$.

В промышленности контроль качества модели определяется заданием предельно допустимого отклонения (как абсолютной погрешности) δ . Модель считается адекватной, если для всех опытных точек выполняется условие:

$$|y_u - \hat{y}_u| \leq \delta.$$

Величину погрешности δ можно приближенно определить на основании погрешности факторных переменных X_j .

При изучении моделируемого явления влияние отдельных факторов и их совокупности на значение отклика определяется знаком и величиной коэффициентов регрессии b_j .

Для аналитических моделей используют аналитические методы оптимизации, которые из-за вводимых допущений значительно снижают точность модели.

Для регрессионных моделей используются экспериментальные методы оптимизации. Такая оптимизация может поводится по одному

или несколькими откликом, но, как правило, справедлива только для ограниченной области эксперимента.

Основными методами экспериментальной оптимизации являются:

- метод градиента;
- планирование второго порядка.

Вопросы

1. Назовите причины возникновения статистической неопределенности результатов опыта
2. Что позволяет построить проведение в каждой точке несколько опытов
3. Как оформляются результаты эксперимента
4. Что содержит основная задача обработки эксперимента
5. Что используют для оценки математического ожидания и дисперсии отклика в отдельных точках факторного пространства
6. Как исключаются грубые ошибки опыта
7. Какие значения строки считаются промахом
8. Что представляют собой критерии промаха
9. Что обеспечивает проверка однородности построчной дисперсии
10. Какие критерии могут использоваться для проверки однородности построчной дисперсии
11. Что характеризует дисперсия воспроизводимости S_y^2
12. Какими вариантами может быть определена проверка дисперсии воспроизводимости S_y^2
13. Как определить среднеквадратическое отклонение отклика σ_y по метрологическим характеристикам измерительных приборов
14. Как определяются b-коэффициенты
15. Что позволяет делать ортогональность матрицы плана
16. По какому критерию проводится проверка статистической значимости b-коэффициентов
17. Как проводится проверка статистической значимости b-коэффициентов с помощью $b_{кр}$
18. Как проводится проверка статистической значимости b-коэффициентов, если известны дисперсии b-коэффициентов σ_{bi}^2
19. По каким критериям проверяется адекватность модели
20. За счет чего можно достичь адекватности модели
21. Что можно использовать в расчетах, если количество опытов в центре плана мало, а произведение nN – большое ($n > 1$ и $l=N$)
22. Как определяется контроль качества модели в промышленности
23. Как определяют погрешность для контроля качества модели в промышленности

24. Чем определяется влияние отдельных факторов и их совокупности на значение отклика
25. Почему прогнозирование поведения модели по регрессионной зависимости представляет собой сложности
26. Что используют для оптимизации аналитических моделей
27. Что используют для оптимизации регрессионных моделей
28. Перечислите основные методы оптимизации

Планирование эксперимента
Тема 24

Планирование экстремальных экспериментов.

Экстремальные эксперименты

Экстремальные эксперименты – это такие эксперименты, которые связаны с получением оптимальных моделей. Оптимальные модели это модели, обладающие оптимальными показателями.

Постановка задачи. Найти значение факторов $X^* = (X_1^*, X_2^*, \dots, X_l^*)$ объекта, при которых его отклик Y достигает экстремального значения Y^* :

$$Y(X^*) = Y^*(X_1^*, X_2^*, \dots, X_l^*)$$

Значение факторов может оговариваться определенными ограничениями.

Если количество факторов $l=1$, задача называется одномерной, при $l>1$ – многомерной.

Более распространены многомерные задачи.

Методы поиска экстремума многомерных задач.

Различают два вида методов поиска экстремума, среди которых наиболее распространены следующие:

1. Градиентные:
 - 1.1. Градиента.
 - 1.2. Крутого восхождения.
 - 1.3. Сопряженных градиентов.
2. Неградиентные:
 - 2.1. Гаусса-Зейделя.
 - 2.2. Случайного поиска.
 - 2.3. Симплексный.

Метод крутого восхождения.

Метод основан на представлении градиента функции нескольких переменных.

Опр. Под градиентом функции $y=f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ понимают вектор, проекциями которого являются частные производные этой функции $\frac{\partial y}{\partial x_i}$.

Особенность градиента функции. Градиент функции направлен в сторону наибольшего изменения функции.

Для линейной модели:

$$Y(X) = b_0 + b_1X_1 + b_2X_2 + \dots + b_lX_l$$

Координаты вектора градиента:

$$\frac{\partial Y}{\partial X_1}, \frac{\partial Y}{\partial X_2}, \dots, \frac{\partial Y}{\partial X_l}$$

совпадают с коэффициентами регрессии $b_0, b_1, b_2, \dots, b_l$. Это значит, что для того чтобы двигаться в направлении градиента, необходимо в процессе эксперимента значения факторов изменять пропорционально оценкам b_i экспериментальной регрессионной модели.

Алгоритм метода в начале выбирает локальную область поверхности отклика, удаленную от области оптимума а потом представляет собой набор циклов, в каждом из которых:

1. На основании малой серии опытов строят линейную модель описания выбранной локальной области.

2. В центре области рассчитывается линейное приближение градиента и определяется его направление.

3. В направлении градиента выполняется один шаг движения до следующей серии опытов. На этом первый цикл завершается.

Точка окончания первого цикла является начальной точкой второго цикла. Второй цикл содержит все перечисленные пункты.

Каждая серия опытов относительно цикла определяет новую модель, новый градиент. Происходит пошаговое улучшение значения целевой функции. Пошаговое движение приводит к достижению области содержащей экстремум.

Во всех точках удаленных от точки экстремума линейная модель при правильно выбранных интервалах обычно является адекватной. В области экстремума линейная модель не может быть адекватной. Следовательно, неадекватность модели является признаком приближения к точке экстремума. Поэтому в этой области выполняется переход к модели второго или даже более высокого порядка. Повтор циклов происходит уже для нелинейной модели. Циклы повторяются до тех пор, пока все координаты градиента (все коэффициенты $b_0, b_1, b_2, \dots, b_l$) не окажутся очень малыми (близкими нулю).

Это означает, что достигнута некоторая область оптимума.

Метод крутого восхождения позволяет найти оптимум за меньшее число опытов по сравнению с методом Гаусса-Зейделя. Это обеспечивается изменением модели в каждом цикле и выбором при этом направления наилучшего изменения параметров оптимизации.

Метод Гаусса-Зейделя.

Для этого метода путь продвижения к оптимуму можно показать на классическом двухфакторном эксперименте. Эксперимент начинается при фиксированном значении фактора x_1 . Варьируя фактор x_2 , продвигаются до локального экстремума. На следующем шаге фиксируют фактор x_2 , а изменяют фактор x_1 , и т.д. Получается ломаная линия, как путь продвижения к экстремуму.

Симплекс метод

Симплексный метод поиска основан на применении симплекс-планов. Эксперимент симплексным методом проводится при тех сочетаниях факторов, которым соответствуют вершины правильного симплекса в n -мерном факторном пространстве. Движение к экстремуму определяется в результате сравнения откликов y_1, y_2, \dots, y_N в вершинах симплекса и выделения среди них экстремального (наименьшего или наибольшего) отклика. Шах поиска выполняется в направлении новой точки, которая является зеркальным отображением экстремального отклика. Эта точка получена в результате вращения рассматриваемого симплекса относительно грани, противоположной вершине с минимальным значением функции отклика. Когда система симплексов начнет вращаться вокруг некоторого экстремального значения выхода, процедура поиска оптимума прекращается.

Планирование второго порядка.

Для построения полинома второго порядка необходимо каждый фактор варьировать не менее чем на трех уровнях. (В действительности, для однозначного задания кривой второго порядка необходимо задать пять точек).

Различают два основных вида планирования: ортогональное и рототабельное.

Ортогональное – это такое планирование, для которого матрица плана является ортогонально. (Свойство ортогональности заключается в том, что сумма произведений элементов любых двух столбцов равня нулю).

Рототабельное – это такое планирование, которое обеспечивает постоянство дисперсий предсказанного значения σ_y^2 отклика во всех точках выбранных опытных точках.

Наиболее распространено и менее трудоемкое – это ортогональное планирование.

Ортогональное планирование второго порядка.

Полином второго порядка в общем случае содержит первые и вторые степени переменных и все возможные их парные произведения:

$$f(x_1) = b_0 + b_1x_1 + b_{11}x_1^2$$

$$f(x_1x_2) = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_{11}x_1^2 + b_{22}x_2^2 + b_{12}x_1x_2$$

$$f(x_1x_2x_3) = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_{11}x_1^2 + b_{22}x_2^2 + b_{33}x_3^2 + b_{12}x_1x_2 + b_{13}x_1x_3 + b_{23}x_2x_3$$

Следовательно, количество слагаемых полинома с k переменными равно:

$$N_2 = C_k^2 + 2k + 1$$

Где C_k^2 - число сочетаний из k переменных по два.

Если для таких полином применять полные трехуровневые факторные эксперименты, то количество точек эксперимента будет равно:

$$N_3 = 3^k$$

Быстрый рост количества экспериментов с увеличением количества переменных затрудняет построение таких планов.

Потому используют некоторую композицию планов и такое планирование называют композиционным. Такие планы имеют меньшее количество опытных точек.

За основу композиционного плана принимается полный факторный эксперимент или дробный факторный эксперимент двухуровневого плана. (ПФЭ 2^k , ДФЭ 2^{k-p}).

Опр. Основа композиционного плана называется ядром этого плана.

Ядро плана дополняется дополнительными точками.

Опр. Дополнительные точки композиционного плана, построенные по определенным закономерностям относительно его ядра, называются звездными точками.

Опр. Если звездные точки расположены симметрично относительно центра плана на окружности или сфере диаметром d , план называется центральным. Ортогональные центрально-композиционные планы (ОЦКП) включают в себя все точки полного факторного эксперимента ПФЭ 2^k , по две звездные точки на каждой координатной оси (относительно каждой переменной) и одну центральную точку:

$$N_u = 2^k + 2k + 1$$

Ортогональный центрально-композиционный план для двух факторов

Пусть уравнение регрессии имеет вид:

$$\hat{y} = b_0 x_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_{11} x_1^2 + b_{22} x_2^2 + b_{12} x_1 x_2$$

Ядром плана будет являться план ПФЭ 2^2 :

№ опыта	X_0	X_1	X_2	Y
1	+	-	-	
2	+	+	-	
3	+	-	+	
4	+	+	+	

Матрица для такого плана записывается в виде:

$$X_n = \begin{bmatrix} +1 & -1 & -1 \\ +1 & +1 & -1 \\ +1 & -1 & +1 \\ +1 & +1 & +1 \end{bmatrix}$$

Ортогональный центрально-композиционный план для кроме ядра содержит одну точку – центр плана и по две звездные точки на каждую переменную.

Опр. Расстояние, на котором звездная точка находится от центра плана, называют звездным плечом.

Звездное плечо может быть записано в виде:

$$\alpha = d/2$$

В этом случае план ОЦКП имеет вид:

№ опыта	X_0	X_1	X_2	Y
1	+	-	-	
2	+	+	-	
3	+	-	+	
4	+	+	+	
5	+	$-\alpha$	0	
6	+	$+\alpha$	0	
7	+	0	$-\alpha$	
8	+	0	$+\alpha$	
9	+	0	0	

Для такого плана структурная матрица для построения уравнения регрессии строиться так чтобы обеспечивалось условие симметрии и ортогональности.

Это обеспечивается соответствующим выбором звездного плеча α и параметром смещения m .

Тогда условие симметрии запишется в виде:

$$\sum_{u=1}^{N_{\delta}} (x_{iu}^2 - m) = 0$$

где $i = 1, 2, \dots, k$.

Ортогональности:

$$\sum_{u=1}^{N_{\delta}} (x_{iu}^2 - m)(x_{ju}^2 - m) = 0$$

где $i \neq j$.

Табличку матрицы для такого плана, можно записать в виде:

№ опыта	x_{0u}	x_{1u}	x_{2u}	$x_{1u}^2 - m$	$x_{2u}^2 - m$	$x_{1u} x_{2u}$	Y
1	+	-	-	$1-m$	$1-m$	+	
2	+	+	-	$1-m$	$1-m$	-	
3	+	-	+	$1-m$	$1-m$	-	
4	+	+	+	$1-m$	$1-m$	+	
5	+	$-\alpha$	0	$\alpha^2 - m$	$-m$	0	
6	+	$+\alpha$	0	$\alpha^2 - m$	$-m$	0	
7	+	0	$-\alpha$	$-m$	$\alpha^2 - m$	0	
8	+	0	$+\alpha$	$-m$	$\alpha^2 - m$	0	
9	+	0	0	$-m$	$-m$	0	

Из условия симметрии получаем:

$$2^k + 2 \alpha^2 - N_{\delta} m = 0$$

Для условия ортогональности:

$$2^k (1-m)^2 - 4 m (\alpha^2 - m) + (2k - 4)m^2 + m^2 = 0$$

Система уравнений позволяет найти два неизвестных параметра:

$$m = \sqrt{\frac{2^k}{N_{\delta}}} \quad \text{и} \quad \alpha = \sqrt{\frac{N_{\delta} m - 2^k}{2}}$$

Параметры для различных видов ОЦКП представлены в таблице

Ядро плана	Количество точек N_{δ}	Звездное плечо α	Смещение m
ПФЭ 2^2	9	1	0,667
ПФЭ 2^3	15	1,215	0,730
ПФЭ 2^4	25	1,414	0,200
ДФЭ 2^{5-1}	27	1,547	0,770
ПФЭ 2^5	43	1,596	0,863
ДФЭ 2^{6-1}	45	1,724	0,843

ВЫВОДЫ

Экстремальные эксперименты – это такие эксперименты, которые связаны с получением моделей, обладающих оптимальными показателями.

Если количество факторов $l=1$, задача называется одномерной, при $l>1$ – многомерной.

Более распространены многомерные задачи.

Различают два вида методов поиска экстремума, среди которых наиболее распространены следующие: градиентные и неградиентные.

Опр. Под градиентом функции понимают вектор, проекциями которого являются частные производные этой функции.

Особенность градиента функции. Градиент функции направлен в сторону наибольшего изменения функции.

Для линейной модели координаты вектора градиента совпадают с коэффициентами регрессии.

Алгоритм метода представляет серию опытов относительно которых происходит пошаговое улучшение значения целевой функции. Пошаговое движение приводит к достижению области содержащей экстремум.

Во всех точках удаленных от точки экстремума линейная модель при правильно выбранных интервалах обычно является адекватной.

Неадекватность модели является признаком приближения к точке экстремума.

В области экстремума выполняется переход к модели второго или даже более высокого порядка.

Повтор экспериментов происходит уже для нелинейной модели до тех пор, пока все координаты градиента (все коэффициенты $b_0, b_1, b_2, \dots, b_l$) не окажутся очень малыми (близкими нулю). Это означает, что достигнута некоторая область оптимума.

Метод Гаусса-Зейделя начинается при фиксированном значении фактора x_1 . Варьируя фактор x_2 , продвигаются до локального экстремума. На следующем шаге фиксируют фактор x_2 , а изменяют фактор x_1 , и т.д. Получается ломаная линия, как путь продвижения к экстремуму.

Метод крутого восхождения позволяет найти оптимум за меньшее число опытов по сравнению с методом Гаусса-Зейделя.

Эксперимент симплексным методом проводится при тех сочетаниях факторов, которым соответствуют вершины правильного симплекса в n -мерном факторном пространстве. Движение к экстремуму определяется в результате сравнения откликов y_1, y_2, \dots, y_N в вершинах симплекса и выделения среди них экстремального (наименьшего или наибольшего) отклика. Шах поиска выполняется в направлении новой точки, которая является зеркальным отображением экстремального отклика. Когда система симплексов начнет вращаться вокруг некоторого экстремального значения выхода, процедура поиска оптимума прекращается.

Различают два основных вида планирования второго порядка: ортогональное и рототабельное.

Ортогональное – это такое планирование, для которого матрица плана является ортогонально.

Рототабельное – это такое планирование, которое обеспечивает постоянство дисперсий предсказанного значения $\sigma_{\hat{y}}^2$ отклика во всех точках выбранных опытных точках.

Наиболее распространено и менее трудоемкое – это ортогональное планирование.

Количество слагаемых полинома второго порядка с k переменными равно:

$$N_2 = C_k^2 + 2k + 1$$

Где C_k^2 - число сочетаний из k переменных по два.

Так как быстрый рост количества экспериментов с увеличением количества переменных затрудняет построение таких планов, то используют некоторую композицию планов и такое планирование называют композиционным.

За основу композиционного плана принимается полный факторный эксперимент или дробный факторный эксперимент двухуровневого плана. (ПФЭ 2^k , ДФЭ 2^{k-p}).

Опр. Основа композиционного плана называется ядром этого плана.

Опр. Дополнительные точки композиционного плана, построенные по определенным закономерностям относительно его ядра, называются звездными точками.

Опр. Если звездные точки расположены симметрично относительно центра плана на окружности или сфере диаметром d , план называется центральным.

Ортогональные центрально-композиционные планы (ОЦКП) включают в себя $N_u = 2^k + 2k + 1$ точек.

Опр. Расстояние, на котором звездная точка находится от центра плана, называют звездным плечом.

Звездное плечо может быть записано в виде:

$$\alpha = d/2$$

План ОЦКП имеет вид:

№ опыта	X_0	X_1	X_2	Y
1	+	-	-	
2	+	+	-	
3	+	-	+	
4	+	+	+	
5	+	$-\alpha$	0	
6	+	$+\alpha$	0	
7	+	0	$-\alpha$	
8	+	0	$+\alpha$	
9	+	0	0	

Для такого плана структурная матрица для построения уравнения регрессии строиться так чтобы обеспечивалось условие симметрии и ортогональности.

Это обеспечивается соответствующим выбором звездного плеча α и параметром смещения m .

Табличку матрицы для такого плана, можно записать в виде:

№ опыта	X_{0u}	X_{1u}	X_{2u}	$x_{1u}^2 - m$	$x_{2u}^2 - m$	$X_{1u} X_{2u}$	Y
1	+	-	-	$1-m$	$1-m$	+	
2	+	+	-	$1-m$	$1-m$	-	
3	+	-	+	$1-m$	$1-m$	-	
4	+	+	+	$1-m$	$1-m$	+	
5	+	$-\alpha$	0	$\alpha^2 - m$	$-m$	0	
6	+	$+\alpha$	0	$\alpha^2 - m$	$-m$	0	
7	+	0	$-\alpha$	$-m$	$\alpha^2 - m$	0	
8	+	0	$+\alpha$	$-m$	$\alpha^2 - m$	0	
9	+	0	0	$-m$	$-m$	0	

Из условия симметрии получаем:

$$2^k + 2 \alpha^2 - N_u m = 0$$

Для условия ортогональности:

$$2^k (1-m)^2 - 4 m (\alpha^2 - m) + (2k - 4)m^2 + m^2 = 0$$

Система уравнений позволяет найти два неизвестных параметра:

$$m = \sqrt{\frac{2^k}{N_{\bar{0}}}} \quad \text{и} \quad \alpha = \sqrt{\frac{N_{\bar{0}} m - 2^k}{2}}$$

Планирование эксперимента
Тема 25

Вычисление b_i – коэффициентов квадратичной модели.

Так как матрица ОЦКП (ортогонально центрально-композиционного плана) ортогональна, то b - коэффициенты определяются по формуле:

$$b_i = \frac{\sum_{u=1}^{N_{\bar{0}}} x_{iu} y_u}{\sum_{u=1}^{N_{\bar{0}}} x_{iu}^2}$$

Отличие записи от зависимостей для линейных моделей в том, что знаменатель здесь не постоянен. При двухфакторном плане значения знаменателя помещены в нижней строке:

№ опыта	X_{0u}	X_{1u}	X_{2u}	$x_{1u}^2 - m$	$x_{2u}^2 - m$	$X_{1u} X_{2u}$	Y_u
1	+	-	-	$1-m$	$1-m$	+	
2	+	+	-	$1-m$	$1-m$	-	

3	+	-	+	$1-m$	$1-m$	-	
4	+	+	+	$1-m$	$1-m$	+	
5	+	$-\alpha$	0	α^2-m	$-m$	0	
6	+	$+\alpha$	0	α^2-m	$-m$	0	
7	+	0	$-\alpha$	$-m$	α^2-m	0	
8	+	0	$+\alpha$	$-m$	α^2-m	0	
9	+	0	0	$-m$	$-m$	0	
$\sum_{u=1}^{N_{\delta}} x_{iu}^2$	9	6	6	2	2	4	

Вычисление b_i – коэффициентов можно представить и через три формулы:

$b_i = \frac{\sum_{u=1}^{N_{\delta}} x_{iu} \bar{y}_u}{2^k + 2\alpha^2}$	$i=0, 1, \dots, k$
$b_{ij} = \frac{\sum_{u=1}^{N_{\delta}} x_{iu} x_{ju} \bar{y}_u}{2^k}$	$i \neq j$
$b_{ii} = \frac{\sum_{u=1}^{N_{\delta}} (x_{iu}^2 - m) \bar{y}_u}{(1-m)^2 2^k + 2(\alpha^2 - m)^2 + (2k-1)m^2}$	$i=1, 2, \dots, k$

Уравнение регрессии имеет вид:

$$\hat{y} = b_0 + \sum_{i=1}^k b_i x_i + \sum_{i \neq j}^k b_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^k b_{ii} x_i^2$$

где $b_0 = b'_0 - m \sum_{i=1}^k b_{ii}$.

Статистический анализ

Задача обработки эксперимента аналогична обработке линейной модели:

1. Оценка математического ожидания и дисперсии отклика в отдельных точках факторного пространства выполняется через вычисление построчных средних \bar{y}_u и дисперсий S_u^2 , которые равны:

$$\bar{y}_u = \frac{1}{n} \cdot \sum_{j=1}^n y_{uj};$$

$$S_u^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \left(\sum_{j=1}^n y_{uj}^2 - n \cdot \bar{y}_u^2 \right)$$

$u = 1, 2, \dots, N_u$.

2. Проверка однородности статистического материала позволяет исключать грубые ошибки с помощью r -критерий.

$$r_{\min} = \frac{\bar{y}_u - y_{u1}}{S_u \cdot \sqrt{n(n-1)}} \quad \text{или} \quad r_{\max} = \frac{y_{un} - \bar{y}_u}{S_u \cdot \sqrt{n(n-1)}}$$

Величина r -критерия ($r_{кр}$) по числу степеней свободы $f_u = n-1$ и уровню значимости α берется из таблиц r -распределений. Если: $r_{\min}, r_{\max} < r_{кр}$ то с надежностью вывода $P=1-\alpha$, т.е. сомнительное крайнее значение отклика считается принадлежащим упорядоченному ряду значений.

3. Проверка однородности построчной дисперсии.

Проверка однородности построчной дисперсии обеспечивает проверку равной точности измерений откликов во всех строках плана. Для этого может быть использован:

- 1) F -критерий
- 2) Критерий Кохрена G
- 3) Критерий Бартлетта

4. Проверка дисперсии воспроизводимости. Если в каждой строке проведено несколько параллельных опытов, то:

$$S_y^2 = \frac{1}{N} \cdot \sum_{u=1}^N S_u^2 = \frac{1}{N(n-1)} \cdot \sum_{u=1}^N \left(\sum_{j=1}^n y_{uj}^2 - n\bar{y}_u^2 \right)$$

Дисперсия воспроизводимости S_y^2 характеризует ошибку опыта, где за ошибку опыта принимают среднеквадратическое отклонение отклика:

$$\sigma_y = \sqrt{S_y^2}.$$

5. Определение b -коэффициентов. (Мы рассмотрели этот вопрос в начале статьи)

6. Проверка статистической значимости b -коэффициентов. Отличие проверки от случая линейных моделей состоит в том, что сумма, стоящая в знаменателе выражения значения коэффициентов неодинакова для различных значений i . Ее значения приведены в следующей таблице:

Таблица
Сума квадратов кодированных переменных структурной матрицы
ОЦКП

Столбец структурной матрицы	Ядро плана					Выражение для суммы квадратов
	ДФЭ					
	2^2	2^3	2^4	2^5	2^{5-1}	
x_{0i}	9	15	25	47	27	$2^k + 2k + 1$
x_{iu}	6	10.95	20	37.1	20.8	$2^k + 2\alpha^2$
$x_{iu}x_{ju}$	4	8	16	32	16	2^k (ДФЭ); 2^{k-p} (ДФЭ)
$x_{iu}^2 - m$	2	4.36	8	16.77	8.24	$2^k(1-m)^2 + 2(\alpha^2 - m)^2 + (2k-1)m^2$

В предположении, что $S_y^2 = \frac{S_y^2}{n} = S_{yu}^2$ и учитывая таблицу суммы квадратов, получим:

$S_{b'_0}^2 = \frac{S_y^2}{n(2^k + 2k + 1)}$
$S_{b_0}^2 = S_{b'_0}^2 + m^2 \sum_{i=1}^k S_{bii}^2$
$S_{bi}^2 = \frac{S_y^2}{n(2^k + 2\alpha^2)}$
$S_{bij}^2 = \frac{S_y^2}{n2^k}$
$S_{bii}^2 = \frac{S_y^2}{n((1-m)^2 2^k + 2(\alpha^2 - m)^2 + (2k-1)m^2)}$

Число степеней свободы f_b для дисперсий всех коэффициентов будет одно и то же и равно числу степеней свободы f_y дисперсии воспроизводимости S_y^2 .

Проверка значимости b -коэффициентов проводится по обычной методике. Например: для сокращения количества счета рассчитывают $b_{кр}$. Все коэффициенты меньше $b_{кр}$, считаются равными нулю. При этом, принимают:

$$b_{кр} = S_{bi} \cdot t_{\text{двехст.кр.}}(\alpha/2, f_y)$$

7. Проверка адекватности модели проводится аналогично линейной модели.

ЗАМЕЧАНИЕ. Оценка дисперсии предсказанного значения отклика определяется в виде:

$$S_{\hat{y}}^2 = S_{b'_0}^2 + \sum_{i=1}^k x_i^2 S_{bi}^2 + \sum_{i=1}^k (x_i^2 - m)^2 S_{bi}^2 + \sum_{i \neq j} (x_i x_j)^2 S_{bij}^2$$

При этом $f_{\hat{y}} = f_y$.