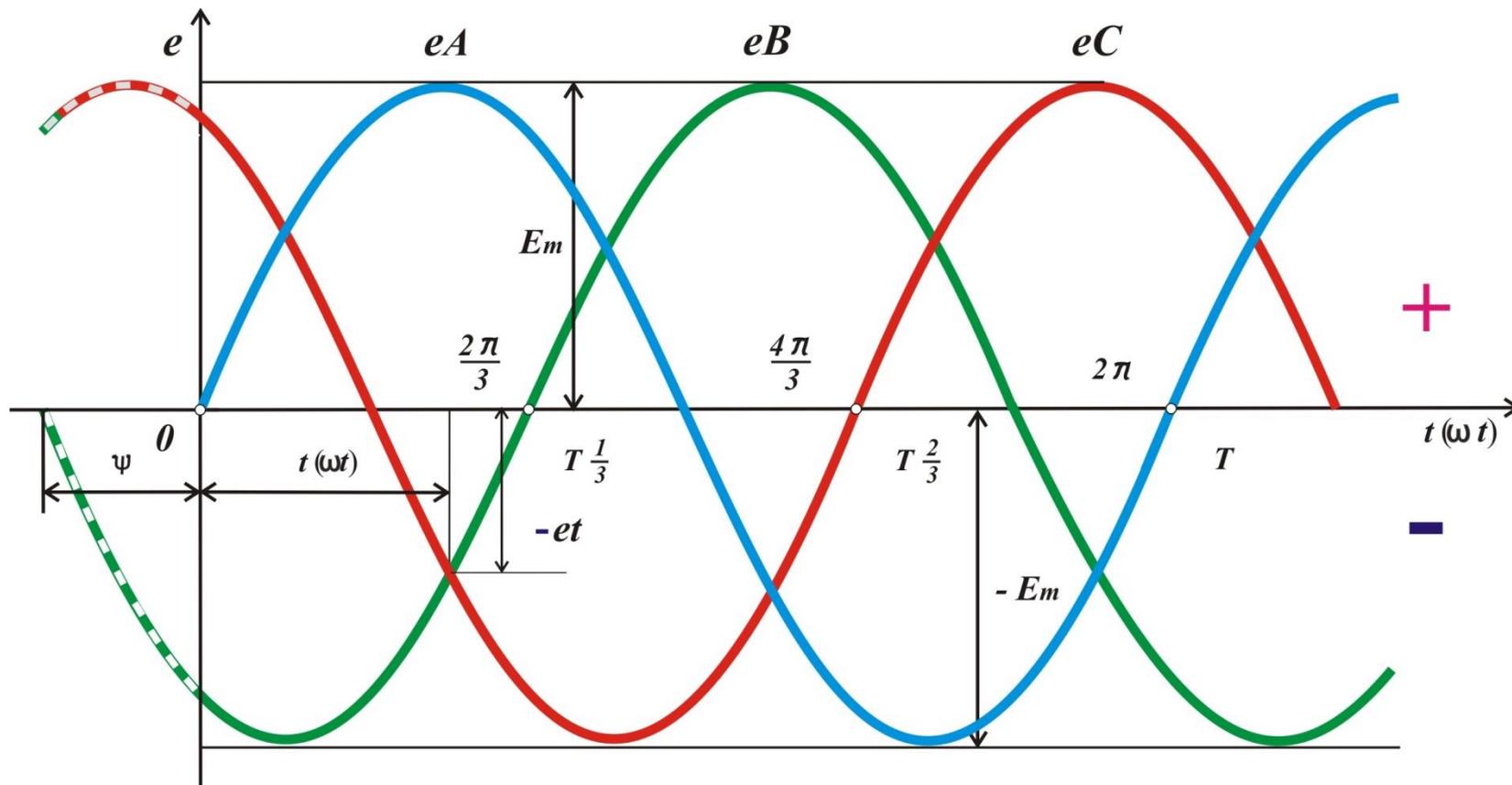


Теоретические основы электротехники



Раздел 1. Основные физические понятия и законы

1. Электростатическое поле
2. Поток вектора напряженности. Теорема Гаусса
3. Поляризованность. Постулат Максвелла. Вектор электрического смещения
4. Напряжение, потенциал, разность потенциалов
5. Электродвижущая сила
6. Электрический ток. Плотность тока
7. Токи переноса и проводимости. Сопротивление. Закон Ома
8. Ток электрического смещения. Емкость. Принцип непрерывности полного тока
9. Магнитное поле. Магнитная индукция
10. Закон полного тока
11. Намагниченность. Напряженность магнитного поля. Обобщенный закон полного тока
12. Магнитный поток и потокоцепление. Закон электромагнитной индукции
13. Индуктивность. ЭДС самоиндукции. Взаимная индуктивность. ЭДС взаимной индукции
14. Электрическая цепь. Расчетная схема цепи. Закон Кирхгофа
15. Зависимость расчетных схем и уравнений цепи от частоты (скорости изменения токов и напряжений)

Раздел 2. Методы расчета и свойства линейных цепей

16. Расчетные схемы источников энергии. Баланс мощностей
17. Обобщенная ветвь цепи постоянного тока. Преобразования расчетных схем
18. Задача расчета цепи. Применение законов Кирхгофа
19. Топологические понятия и матрицы. Матричные уравнения цепи
20. Метод контурных токов
21. Метод узловых потенциалов
22. Свойства линейных электрических цепей
23. Метод эквивалентного генератора

Раздел 3. Электрические цепи синусоидального тока

24. Синусоидальные ЭДС, напряжения и токи
25. Представления синусоидальных функций времени комплексными числами
26. Сопротивление, индуктивность и емкость в цепи синусоидального тока
27. Законы Ома и Кирхгофа в комплексной форме. Комплексное сопротивление и проводимость
28. Расчет разветвленных цепей синусоидального тока
29. Топографические векторные диаграммы
30. Мощности в цепи синусоидального тока
31. Резонанс напряжений
32. Резонанс токов
33. Резонансы в сложных цепях
34. Особенности расчета цепей с индуктивными связями
35. Понятие о трансформаторе
36. Схемы замещения трансформаторов

Раздел 4. Многополюсники и четырехполюсники

37. Классификация и примеры
38. Уравнения и параметры проходных пассивных и неавтономных активных четырехполюсников
39. Определение параметров проходных пассивных и неавтономных активных четырехполюсников
40. Схемы замещения
41. Характеристические (вторичные) параметры
42. Идеализированные четырехполюсники
43. Операционный усилитель

Раздел 5. Трехфазные цепи

44. Основные понятия и схемы соединения
45. Расчет симметричных режимов
46. Расчет несимметричных режимов
47. Вращающееся магнитное поле. Принцип действия трехфазных двигателей

Раздел 6. Периодические несинусоидальные токи

48. Разложение периодической функции в ряд Фурье
49. Дискретные спектры сигналов
50. Применение рядов Фурье к расчету токов, напряжений, мощностей
51. Несинусоидальные кривые с периодической огибающей

Раздел 7. Переходные процессы в линейных цепях

52. Общие сведения
53. Классический метод анализа
54. Переходный процесс при отключении катушки
55. Переходный процесс при включении катушки на синусоидальное напряжение
56. Переходный процесс в цепи $R - L - C$
57. Единичные ступенчатые и импульсивные функции
58. Интеграл Дюамеля
59. Преобразование Лапласа и его свойства
60. Законы электрических цепей в оперативной форме
61. Последовательность расчета в оперативной форме
62. Спектры непрерывных сигналов
63. Передаточные функции и частотные характеристики электрических цепей

Раздел 8. Установившиеся процессы в цепях с распределенными параметрами

64. Однородная длинная линия и ее уравнения
65. Бегущие волны
66. Уравнения линии для действующих значений токов и напряжений
67. Коэффициент отражения волны. Согласованный режим работы линий
68. Вторичные параметры однородной линии. Линия без искажений
69. Линия без потерь

Раздел 9. Переходные процессы в длинных линиях

- 70. Общее решение уравнений линии без потерь
- 71. Общий метод нахождения отраженных волн
- 72. Качественный анализ переходных процессов в линиях, содержащих сосредоточенные сопротивления, индуктивности и емкости
- 73. Многократные отражения волн

Раздел 10. Нелинейные цепи постоянного тока

- 74. Резистивные нелинейные элементы и их характеристики
- 75. Графический расчет при последовательно-параллельном соединении двухполюсных элементов
- 76. Графический расчет цепи с нелинейным четырехполюсником. Линейные схемы замещения нелинейных элементов
- 77. Основные понятия, допущения при расчете и законы магнитных цепей
- 78. Расчеты магнитных цепей

Раздел 11. Нелинейные цепи при переменном токе

- 79. Характеристики нелинейных элементов при переменных токах и напряжениях
- 80. Некоторые физические явления в нелинейных цепях переменного тока и их применение
- 81. Аппроксимация характеристик нелинейных элементов
- 82. Основные методы расчета
- 83. Пример применения метода кусочно-линейной аппроксимации
- 84. Схема замещения и векторная диаграмма катушки с ферромагнитным сердечником
- 85. Феррорезонанс

Раздел 12. Переходные процессы в нелинейных цепях

- 86. Метод условной линеаризации
- 87. Метод кусочно-линейной аппроксимации

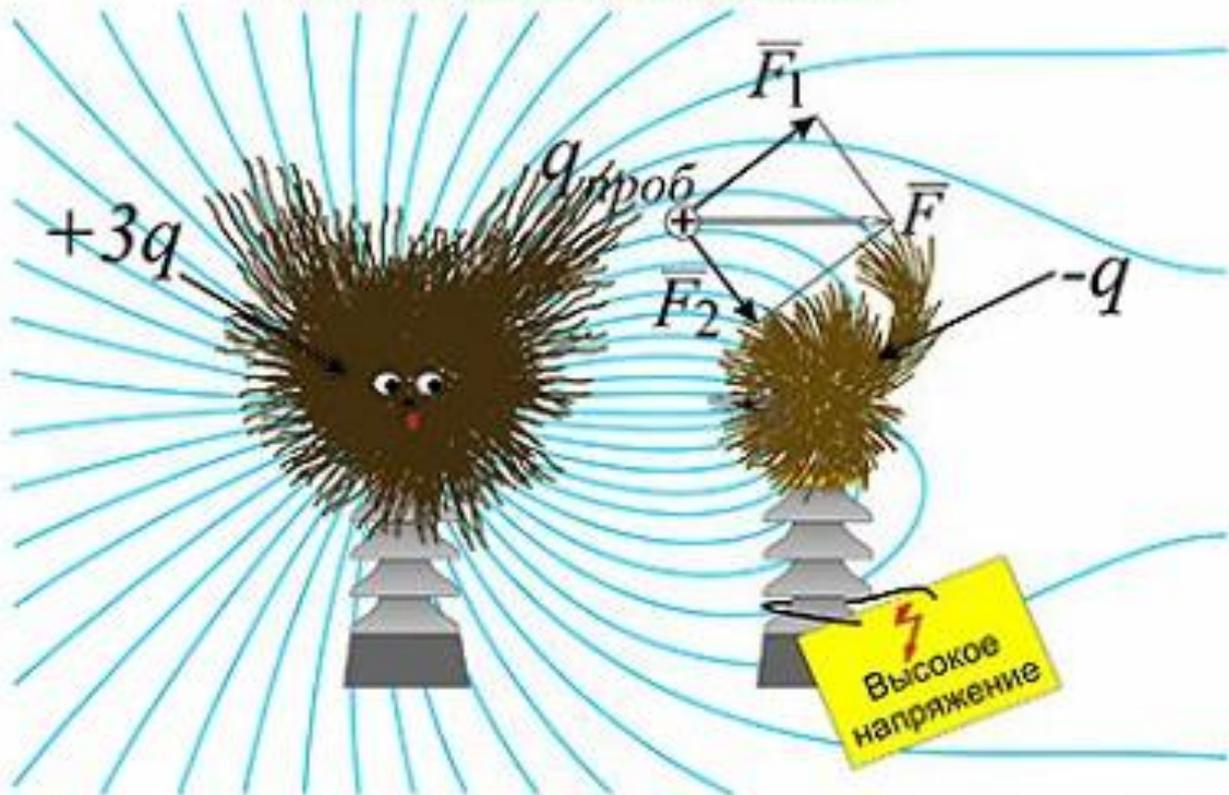
88. Метод последовательных интервалов
89. Понятие об устойчивости режима в нелинейных цепях

Раздел 13. Теория электромагнитного поля

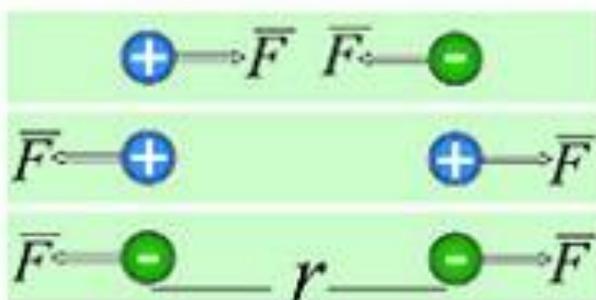
90. Уравнения Максвелла в дифференциальной форме
91. Постулат Максвелла и принцип непрерывности магнитного поля в дифференциальной форме
92. Уравнения электростатического поля
93. Граничные условия в электростатическом поле
94. Электрическое поле постоянных токов. Скалярный потенциал
95. Магнитное поле постоянных токов. Скалярный потенциал
96. Векторный потенциал магнитного поля
97. Плоская электромагнитная волна в диэлектрике
98. Плоская электромагнитная волна в проводнике
99. Вектор Пойтинга
100. Поверхностный эффект и эффект близости

1. Основные физические понятия и законы

1.1 Электростатическое поле



Закон Кулона

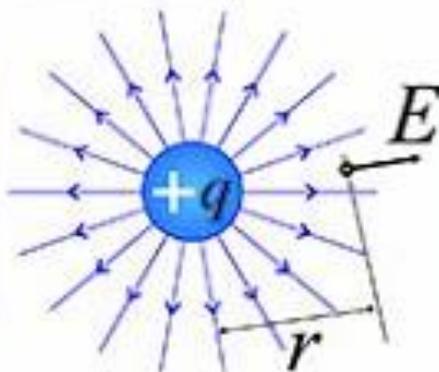


$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_2}{r^2} [H]$$

$$\epsilon_0 \cong \frac{1}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9} \cong 8,85 \cdot 10^{-12} \left[\frac{\Phi}{M} \right]$$

Напряженность электростатического поля

$$\vec{E} \equiv \frac{\vec{F}}{q_{\text{проб}}} \left[\frac{B}{M} \right]$$



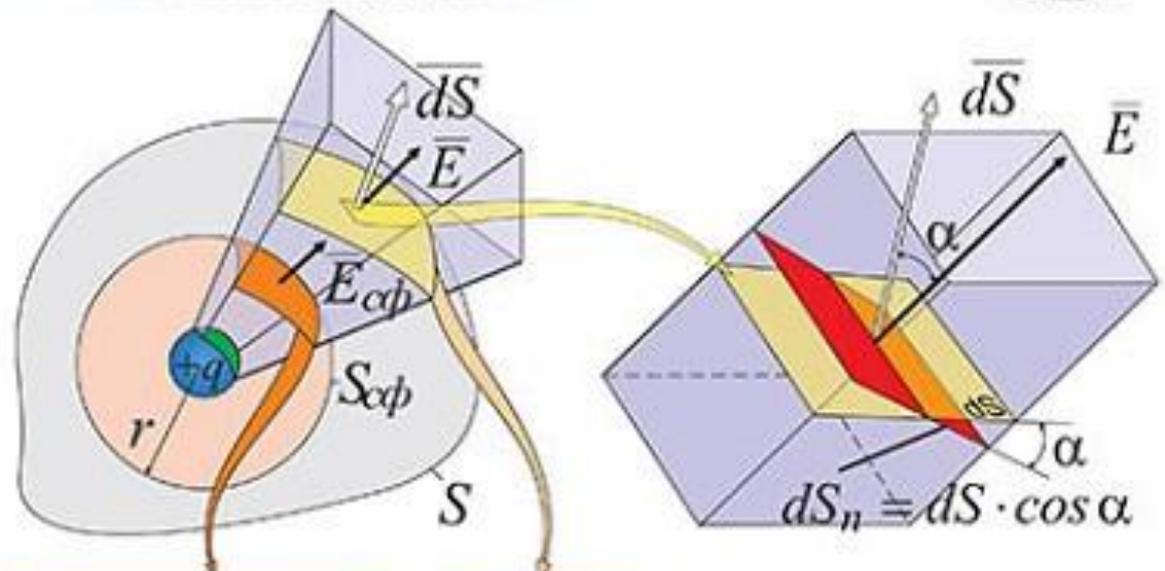
$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

1. Основные физические понятия и законы

1.2 Поток вектора напряженности

Теорема Гаусса

2



$$\int_{\Delta S_{c\phi}} E_{c\phi} dS_{c\phi} = \int_{\Delta S} \vec{E} \cdot d\vec{S} \quad E dS \cdot \cos \alpha = \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = E_{c\phi} S_{c\phi} = \frac{q}{4\pi r^2 \epsilon_0} 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0}$$

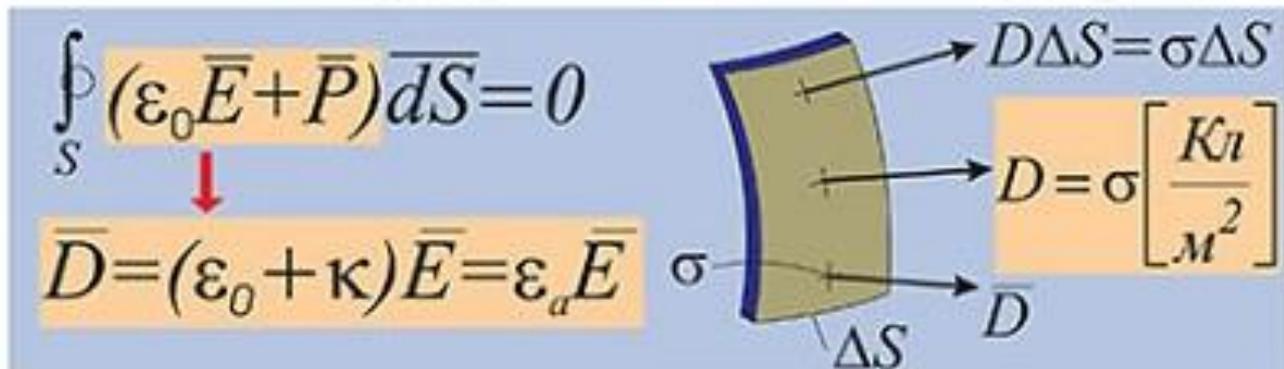
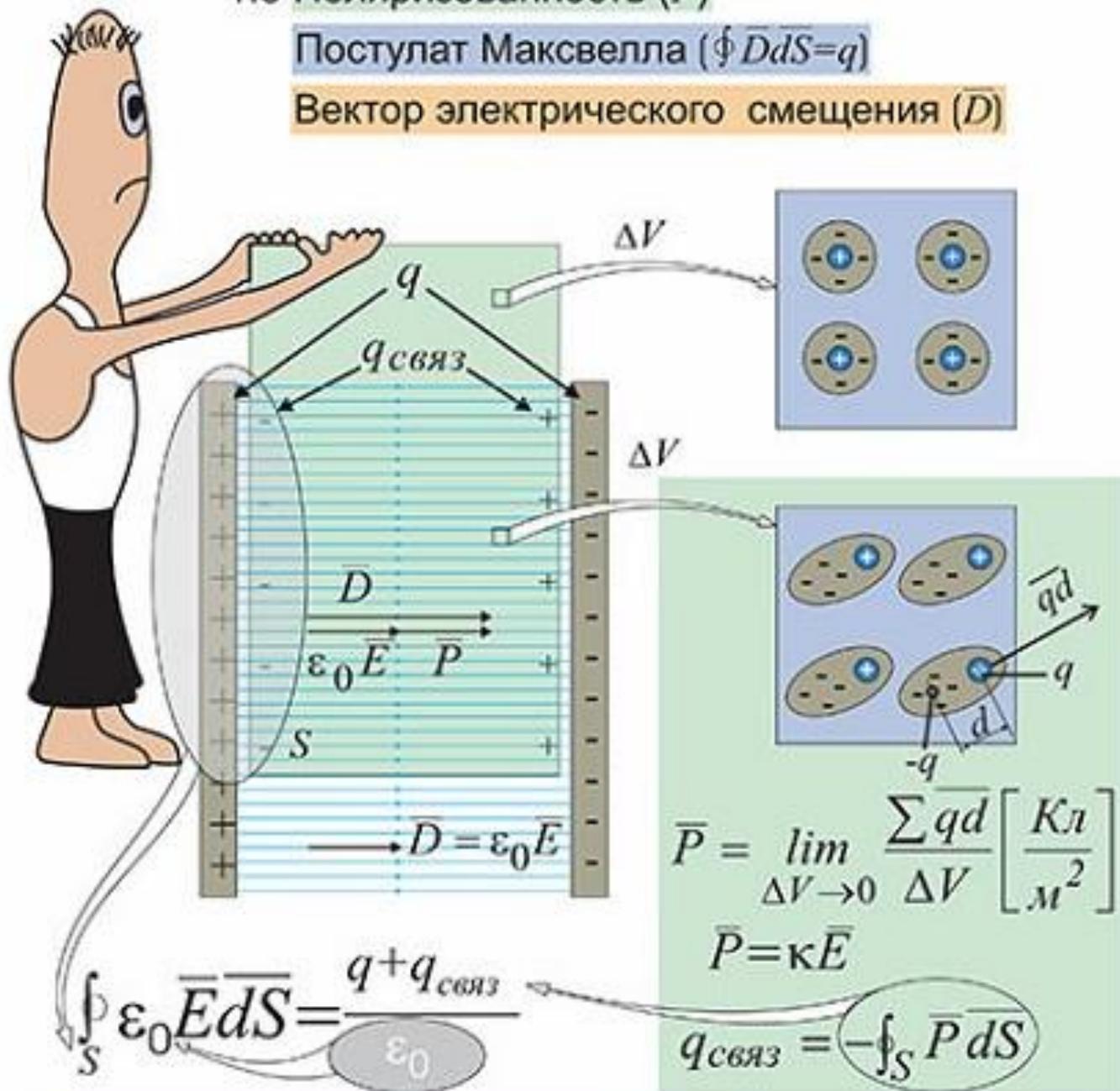
$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

1. Основные физические понятия и законы

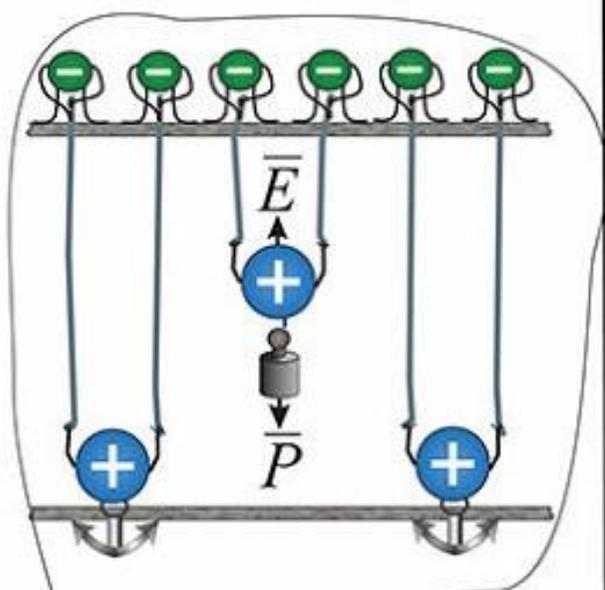
1.3 Поляризованность (\vec{P})

Постулат Максвелла ($\oint \vec{D} d\vec{S} = q$)

Вектор электрического смещения (\vec{D})



1.4. Напряжение, потенциал, разность потенциалов.



$$U_{amb} = \int_{amb} \vec{E} \cdot d\vec{l} \cdot \cos \alpha = \int_{amb} \bar{E} dl$$

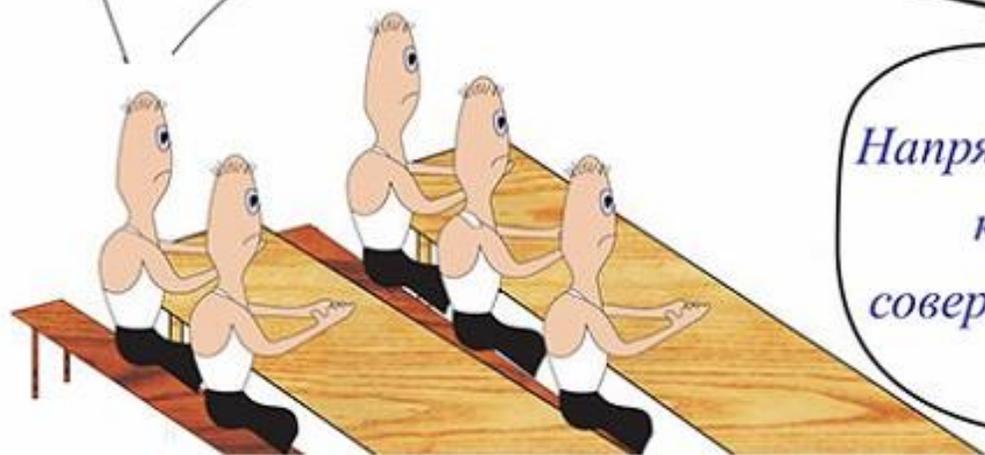
$$\oint \bar{E} d\vec{l} = 0$$

$$U_{amb} = U_{anb} = U_{ab}$$

$$\varphi_a = \int_a^p \bar{E} d\vec{l}$$

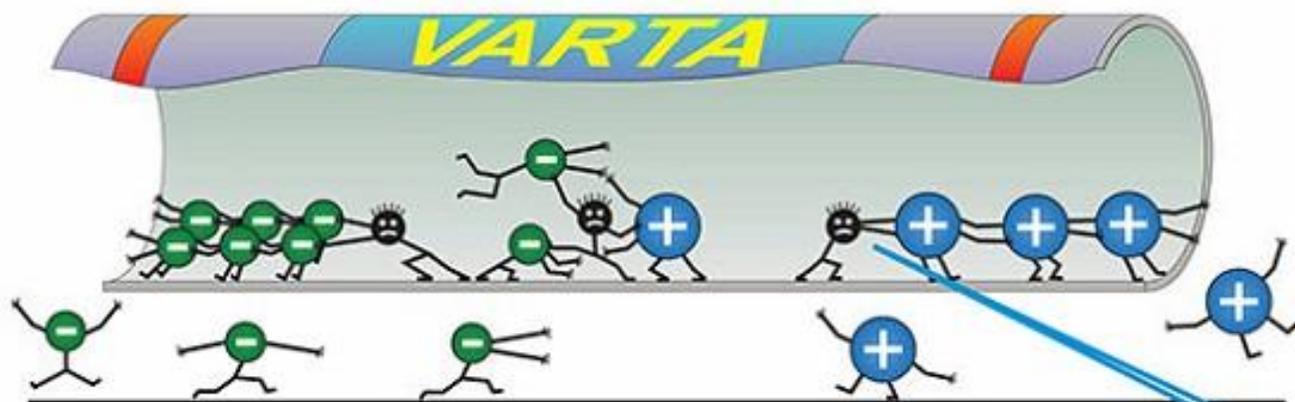
$$\varphi_a - \varphi_b = U_{ab}$$

The diagram shows a point a at the origin of several blue electric field lines. A red curved path l goes from a to point b . A point m is on this path, with a small segment dl . The angle between the electric field vector \vec{E} and the path element dl is α . A normal vector \vec{n} is also shown. A point P is marked as the reference potential $(\varphi = 0)$.

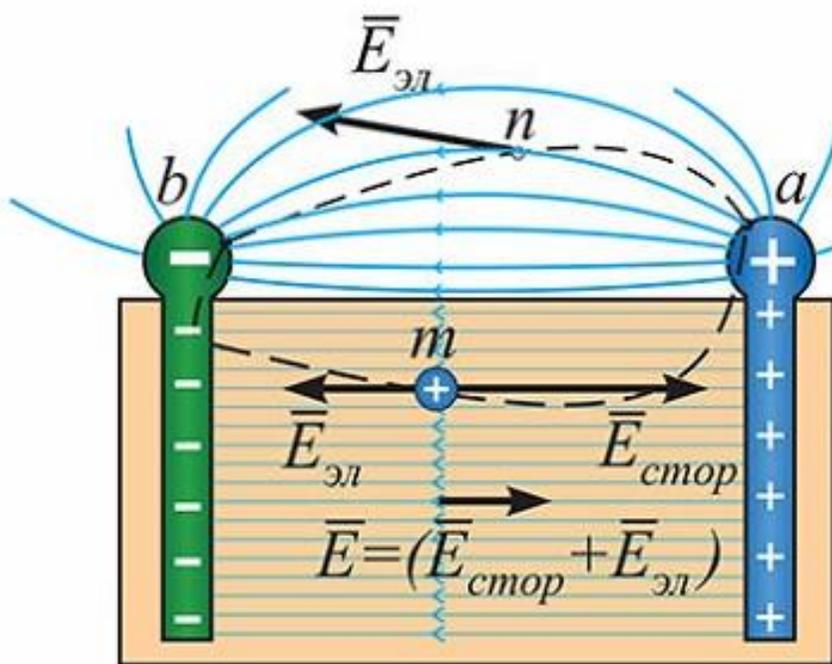


Напряжение - это работа, которую может совершить электрическое поле...

1.5 Электродвижущая сила



ЭДС - это работа, совершаемая сторонними силами...

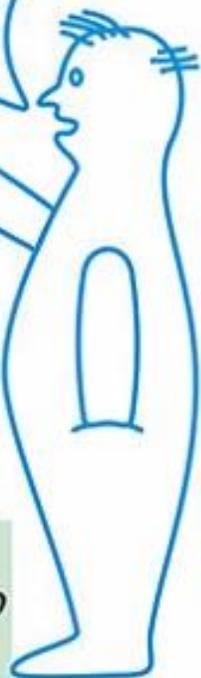


$$e = \int_{bma} \vec{E}_{стор} d\vec{l}, [В]$$

$$\oint_{bmanb} (\vec{E}_{стор} + \vec{E}_{эл}) dl = e \neq 0$$

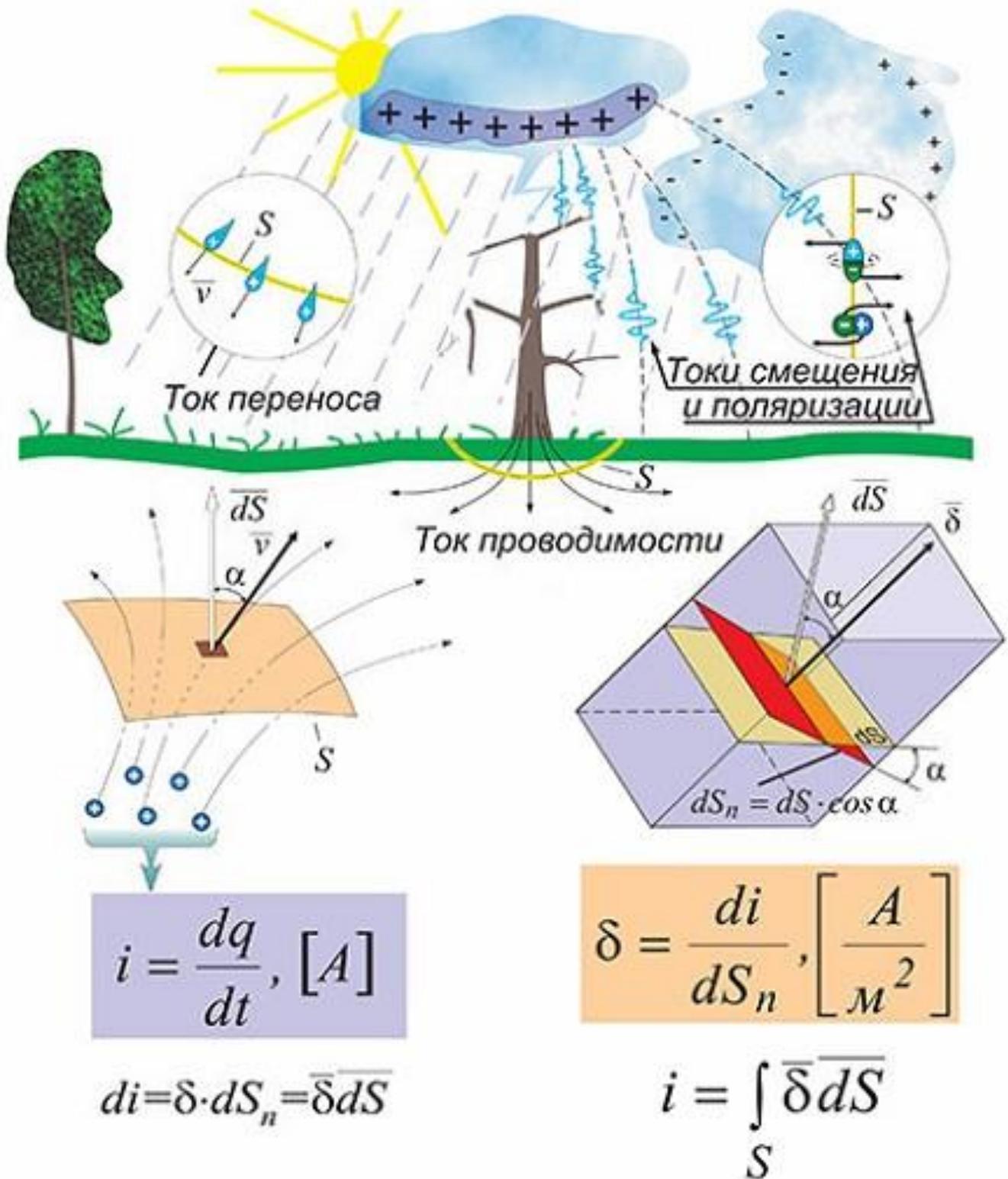
Если $E_{стор} = E_{эл}$, то :

$$\vec{E}_{стор} + \vec{E}_{эл} = 0 \text{ и } e = \int_{anb} \vec{E}_{эл} d\vec{l} = U_{ab}$$

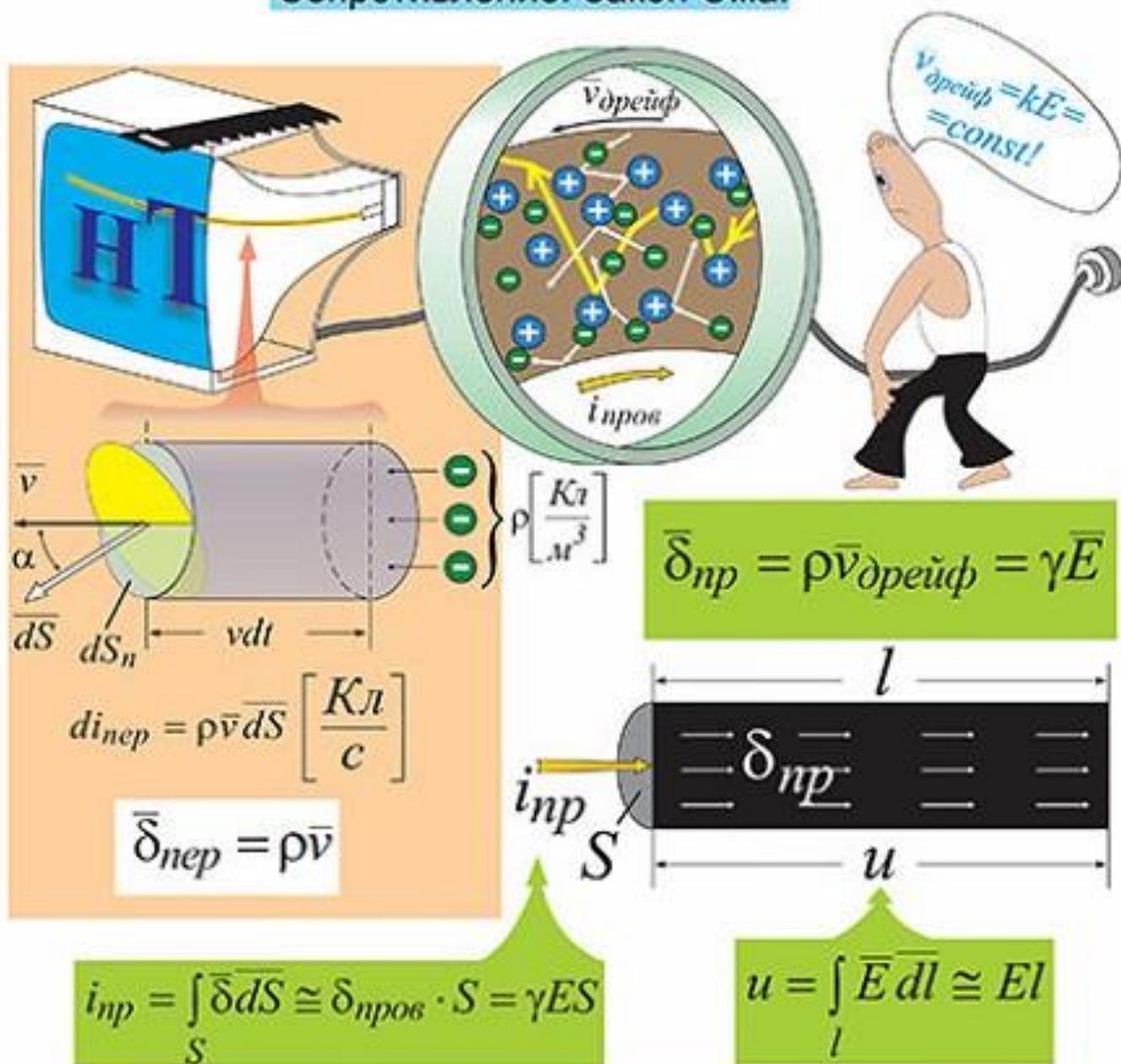


1.6 Электрический ток (i)

Плотность тока (δ)



1.7 Токи переноса и проводимости.
Соппротивление. Закон Ома.

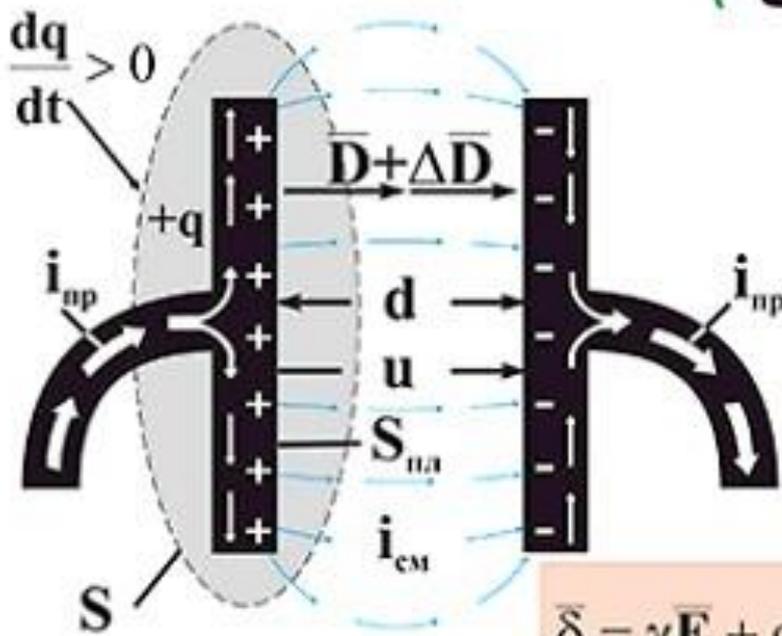


$$R = \frac{u}{i_{np}} \cong \frac{l}{\gamma S} = \frac{\rho l}{S} \text{ [Ом]}, \text{ где } \rho = \frac{1}{\gamma}$$

$$u = Ri, \quad i = Gu, \quad \text{где } G = 1/R$$

1.8 Ток электрического смещения (i_{em}, δ_{em}). Емкость (C).

Принцип непрерывности полного тока ($\oint \bar{\delta} d\bar{S} = 0$)



$$\oint \bar{D} d\bar{S} = q$$

$$\oint \frac{d\bar{D}}{dt} d\bar{S} = \frac{dq}{dt}$$

$$i_{em} = -i_{np} - i_{nep}$$

$$\bar{\delta}_{em} = \frac{d\bar{D}}{dt} = \epsilon_0 \frac{d\bar{E}}{dt} + \frac{d\bar{P}}{dt}$$

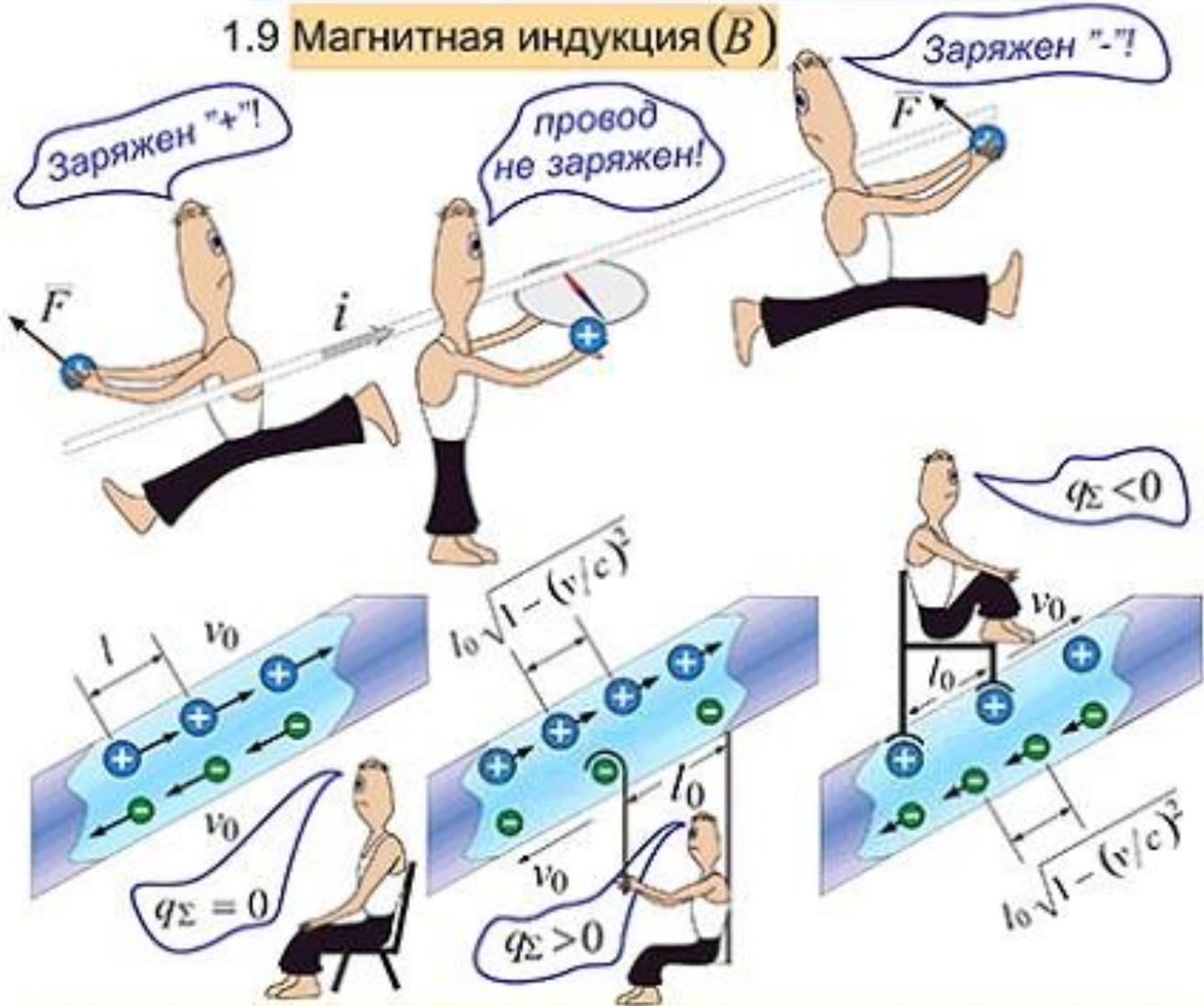
$$\bar{\delta} = \gamma \bar{E} + \rho \bar{v} + \frac{d\bar{D}}{dt} \quad \oint \bar{\delta} d\bar{S} = 0$$

$u \cong E d \quad q \cong DS_{nl} = \epsilon_a ES \quad C = \frac{q}{u} \cong \frac{\epsilon_a S}{d}, [\phi] q = Cu$

$$i_c = \frac{dq}{dt} = C \frac{du_c}{dt}$$

1. Основные физические понятия и законы

1.9 Магнитная индукция (B)



$$\vec{F} = q\vec{E} + q[\vec{v}\vec{B}]$$

\downarrow
 $\vec{F}_{эл.ст}$

\downarrow
 $\vec{F}_{магн}$

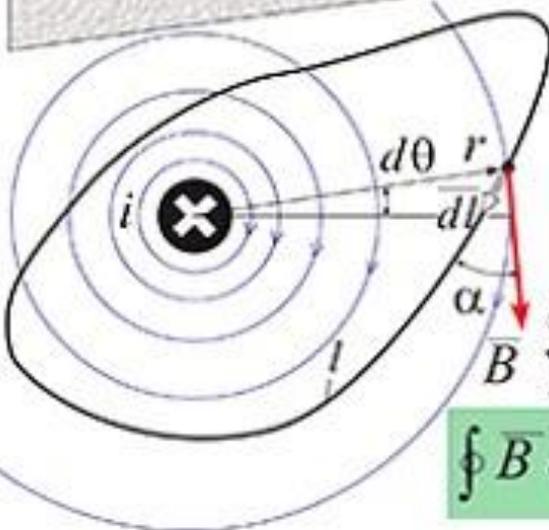
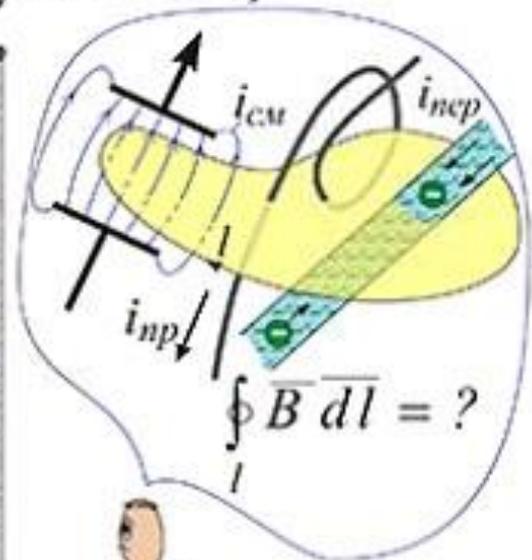
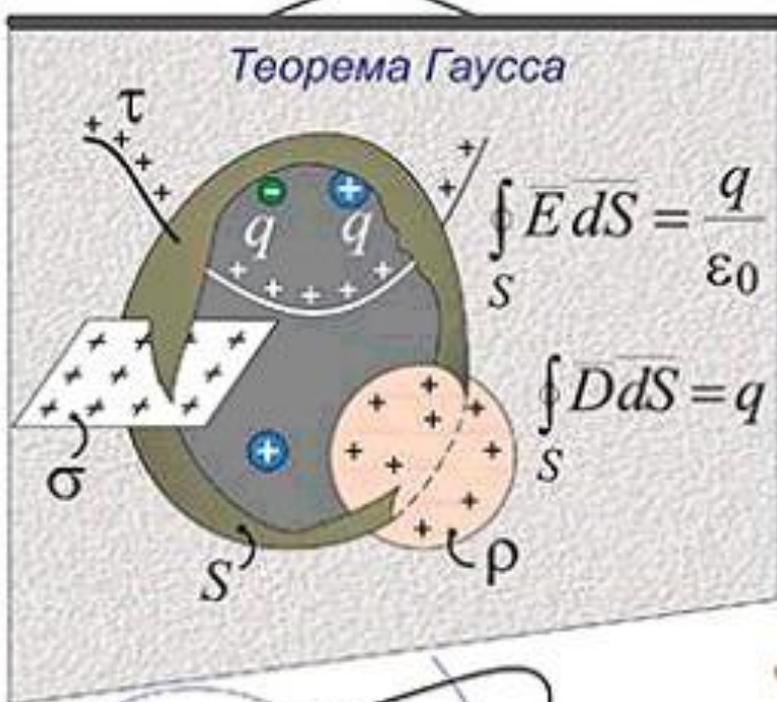
$$B = \frac{F_{магн}}{q_{проб} \cdot v} [Тл] \text{ при } \vec{v} \perp \vec{B}$$

$$\vec{v} = 0$$

$$\vec{F} = 0$$

1.10 Закон полного тока ($\oint \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 i$)

Теорема Гаусса

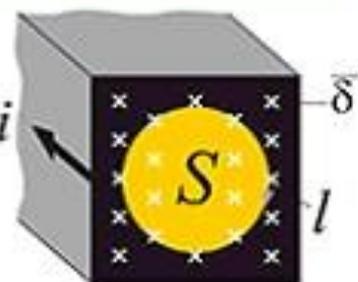
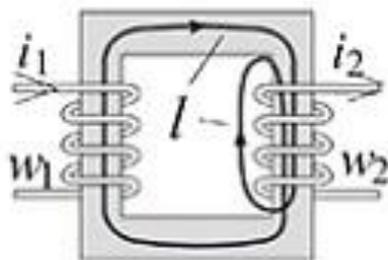
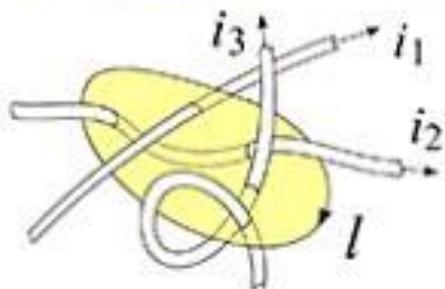


$$dl \cdot \cos \alpha = r d\theta$$

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}, \text{ где } \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$$

$$\oint_l \vec{B} d\vec{l} = \oint_l B dl \cos \alpha = \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0 i}{2\pi r} r d\theta = \mu_0 i$$

$$\oint \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 i, \text{ где } i = i_{np} + i_{nep} + i_{cm}$$



$$\oint \vec{B} d\vec{l} = (i_1 - 2i_3) \mu_0$$

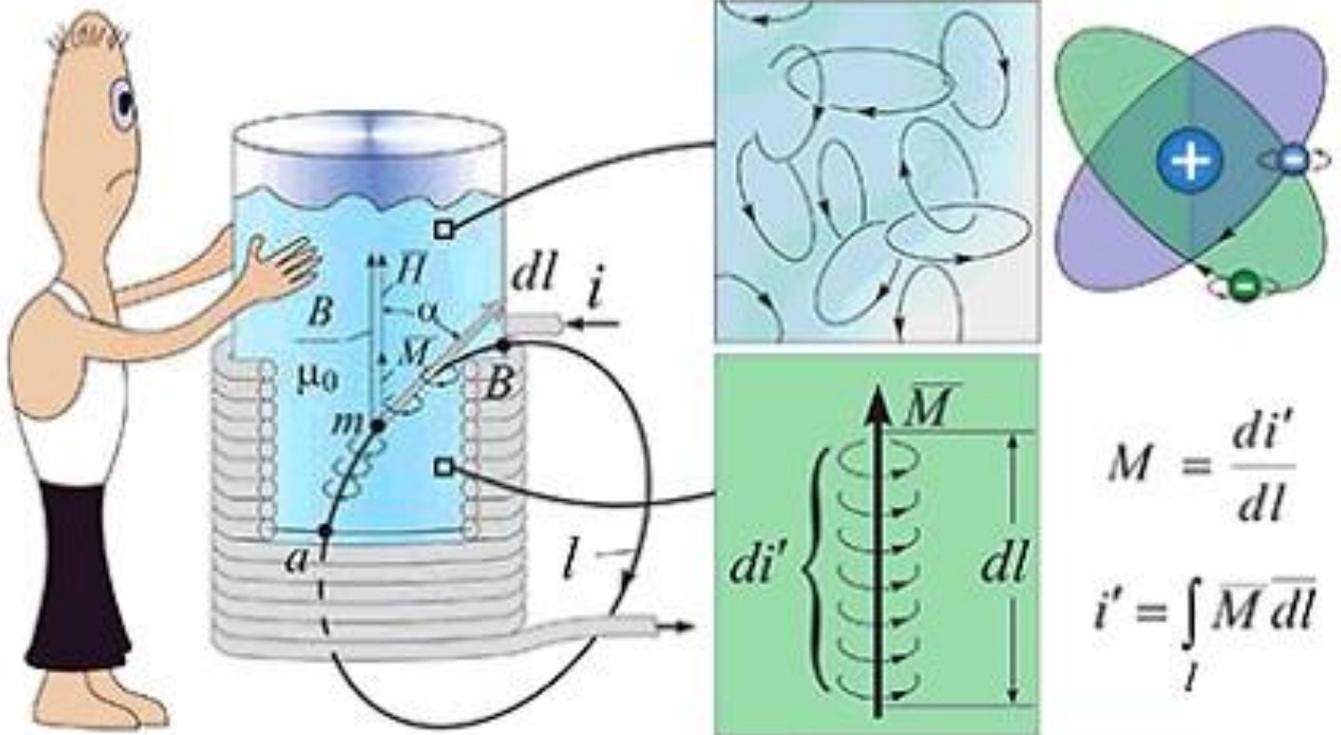
$$\oint \vec{B} d\vec{l} = (w_1 i_1 - 2w_2 i_2) \mu_0$$

$$\oint \vec{B} d\vec{l} = \delta \cdot S \mu_0$$

1.11. Намагниченность (M)

Напряженность магнитного поля (H)

Обобщенный закон полного тока



$$\oint \overline{B} d\overline{l} = \mu_0 w i + \mu_0 i' \Rightarrow \int_{amb} \overline{M} d\overline{l} = \oint \overline{M} d\overline{l}$$

$$\oint \left(\frac{\overline{B}}{\mu_0} - \overline{M} \right) d\overline{l} = w i$$

$$\overline{H} = \frac{\overline{B}}{\mu_0} - \overline{M}$$

$$\oint \overline{H} d\overline{l} = w i$$

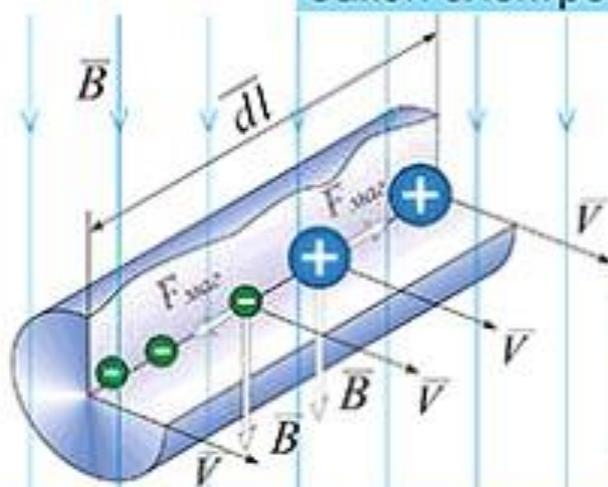
В линейных средах: $\overline{B} = \mu_a \overline{H}$

В нелинейных средах (ферромагнетики): $B(H)$ - нелинейная функция



1.12 Магнитный поток (Φ) и потокосцепление (ψ)

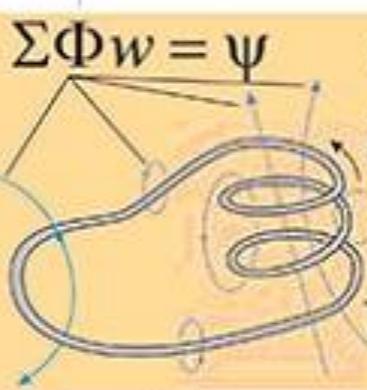
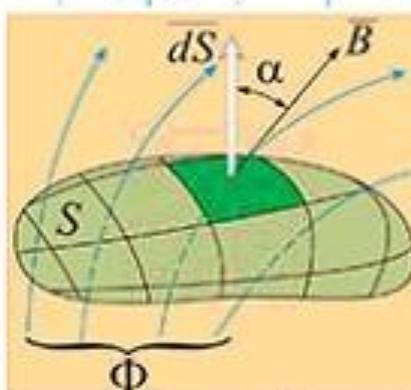
Закон электромагнитной индукции



$$\vec{F}_{стор} = \vec{F}_{маг} = q[\vec{V} \vec{B}]$$

$$\vec{v} \, de = \vec{F}_{стор} \, d\vec{l} = [\vec{V} \vec{B}] \, d\vec{l}$$

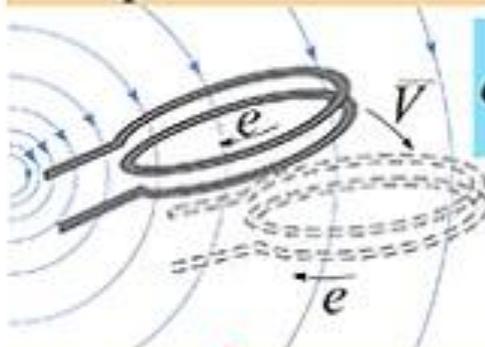
$$e = \frac{1}{q_l} \int \vec{F}_{стор} \, d\vec{l} = \int_l [\vec{V} \vec{B}] \, d\vec{l}$$



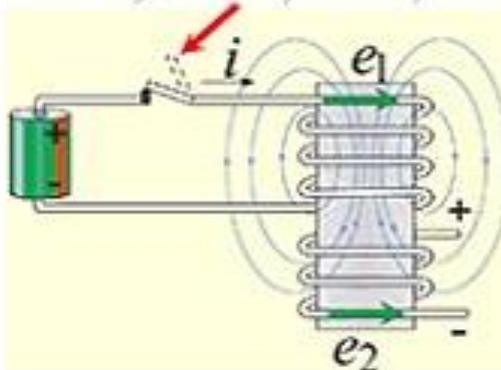
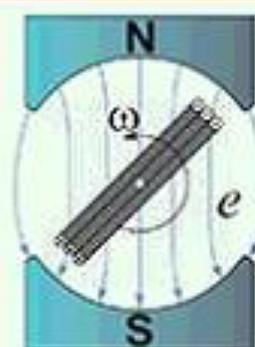
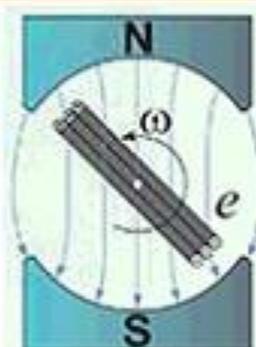
$$\Sigma \Phi_w = \psi \quad \Phi = \int_S \vec{B} \, d\vec{S}, [B\delta]$$

$$\oint \vec{B} \, d\vec{S} = 0$$

$$w \, \psi \cong w \Phi, [B\delta]$$



$$e = - \frac{d\psi}{dt}$$

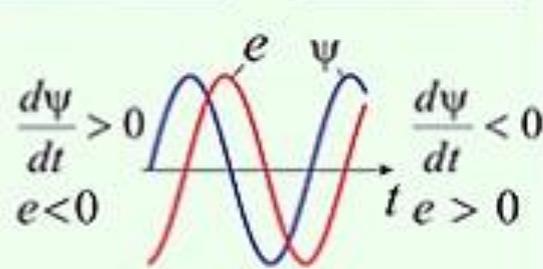


$$\frac{d\psi_1}{dt} > 0$$

$$e_1 < 0$$

$$\frac{d\psi_2}{dt} > 0$$

$$e_2 < 0$$



$$\frac{d\psi}{dt} > 0 \quad e < 0$$

$$\frac{d\psi}{dt} < 0 \quad e > 0$$

1.13. Индуктивность (L), ЭДС самоиндукции (e_L)

Взаимная индуктивность (M)

ЭДС взаимной индукции (e_M)

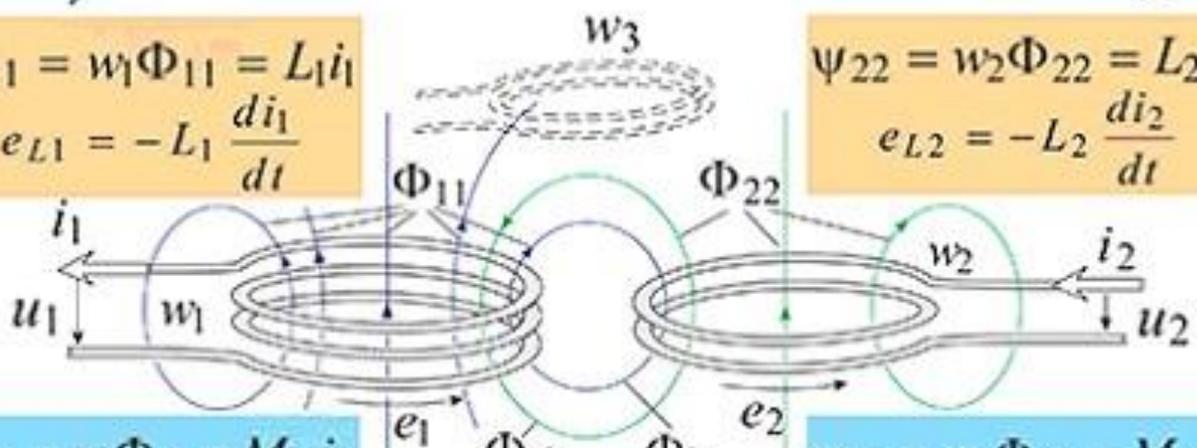


$$\psi_{11} = w_1 \Phi_{11} = L_1 i_1$$

$$e_{L1} = -L_1 \frac{di_1}{dt}$$

$$\psi_{22} = w_2 \Phi_{22} = L_2 i_2$$

$$e_{L2} = -L_2 \frac{di_2}{dt}$$



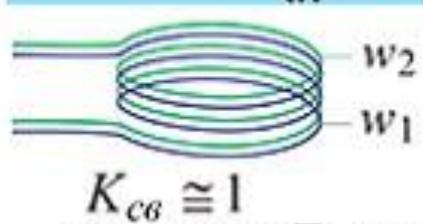
$$\psi_{12} = w_1 \Phi_{12} = M_{12} i_2$$

$$e_{M1} = M_{12} \frac{di_2}{dt}$$

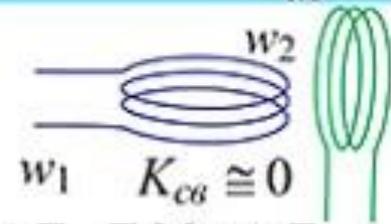
$$\psi_{21} = w_2 \Phi_{21} = M_{21} i_1$$

$$e_{M2} = M_{21} \frac{di_1}{dt}$$

$M_{12} = M_{21} = M$
(принцип взаимности)



$$K_{св} = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} \leq 1$$



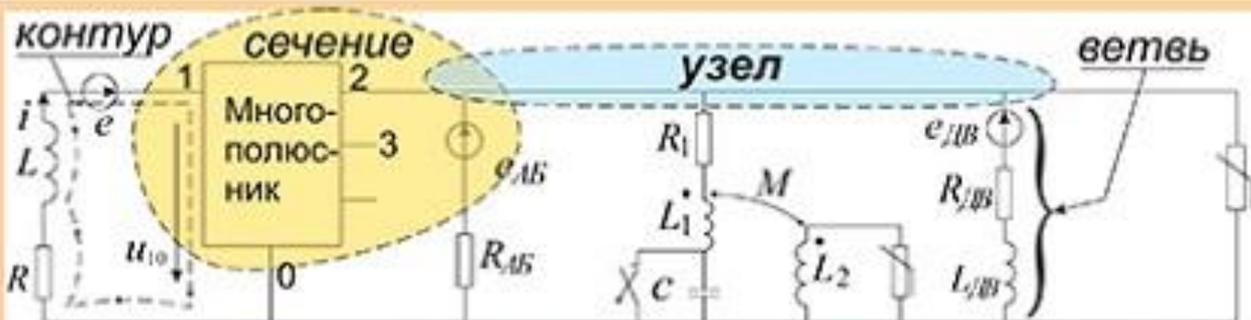
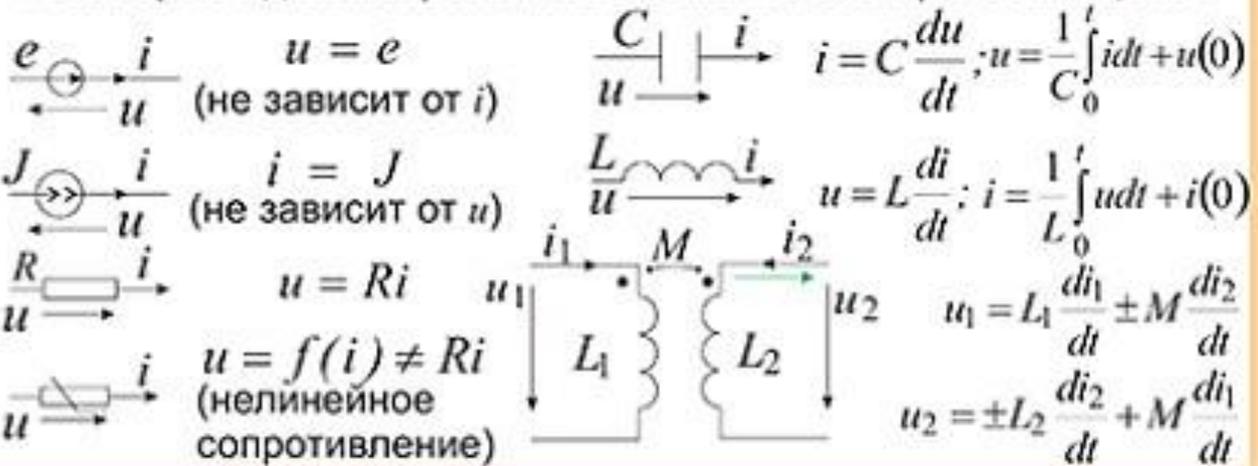
$$\psi_K = \psi_{KK} \mp \psi_{K1} \mp \psi_{K2} \mp \dots = L_K i_K \mp M_{K1} i_1 \mp \dots \mp M_{K2} i_2 \mp \dots$$

$$u_K = -e_K = \frac{d\psi_K}{dt} = L_K \frac{di_K}{dt} \mp M_{K1} \frac{di_1}{dt} \mp M_{K2} \frac{di_2}{dt} \mp \dots$$

1.14. Электрическая цепь
 Расчетная схема цепи
 Законы Кирхгофа



Некоторые идеализированные элементы электрических цепей



Для узла (сечения):

$$\sum i = 0 \quad (\text{м.к. } \oint \delta \bar{dS} = 0)$$

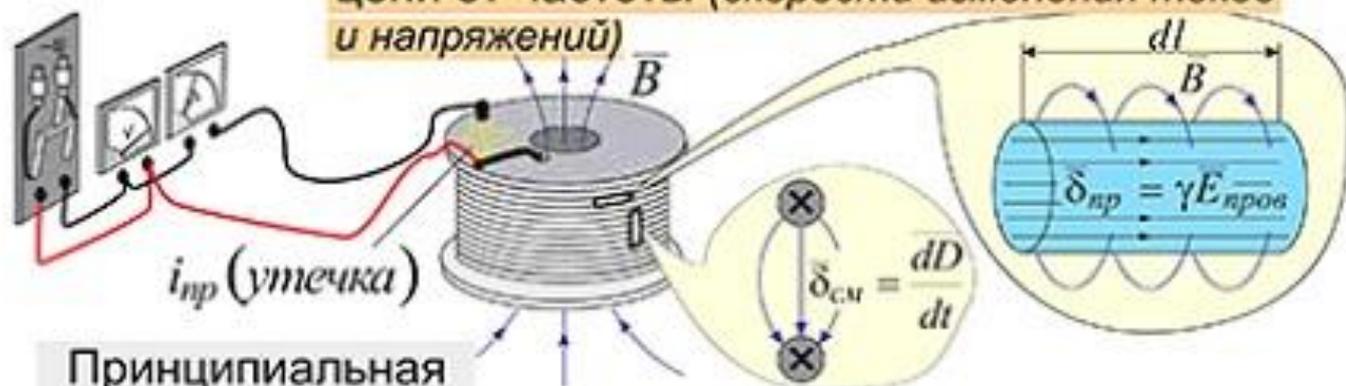
Для контура:

$$\sum u = \sum e \quad (\text{м.к. } \oint E \bar{dl} = \sum e)$$

Если контур не проходит внутри ЭДС, то

$$\sum u = 0$$

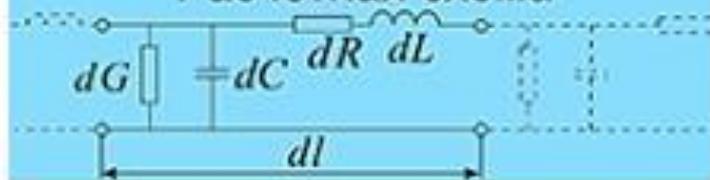
1.15. Зависимость расчетных схем и уравнений цепи от частоты (скорости изменения токов и напряжений)



Принципиальная схема

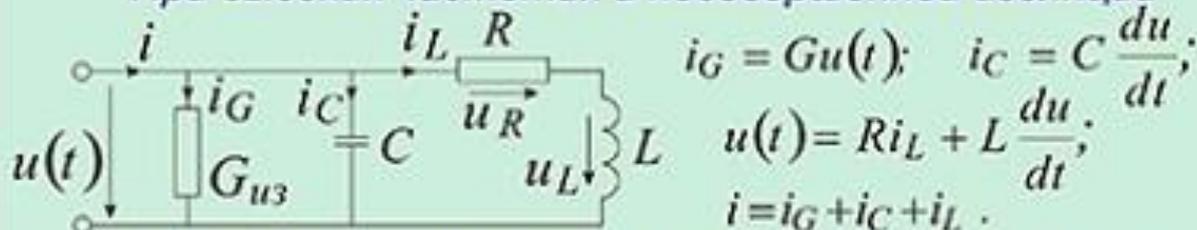


Расчетная схема

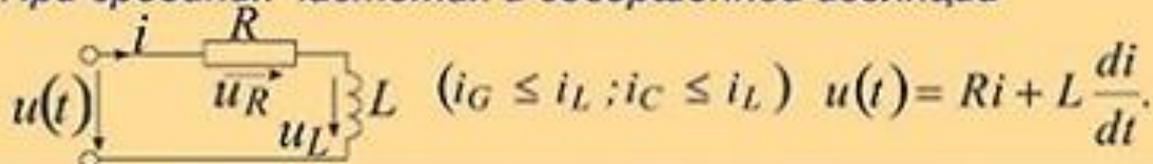


Приближенные расчетные схемы и уравнения

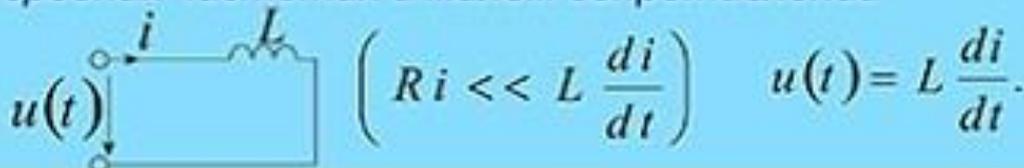
При высоких частотах и несовершенной изоляции



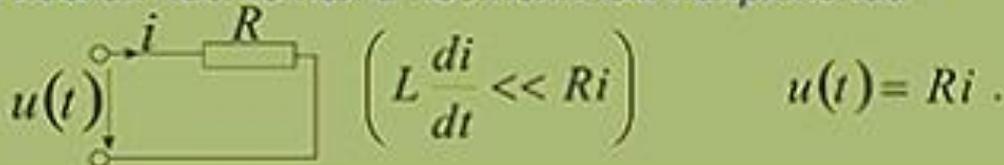
При средних частотах и совершенной изоляции



При средних частотах и малом сопротивлении

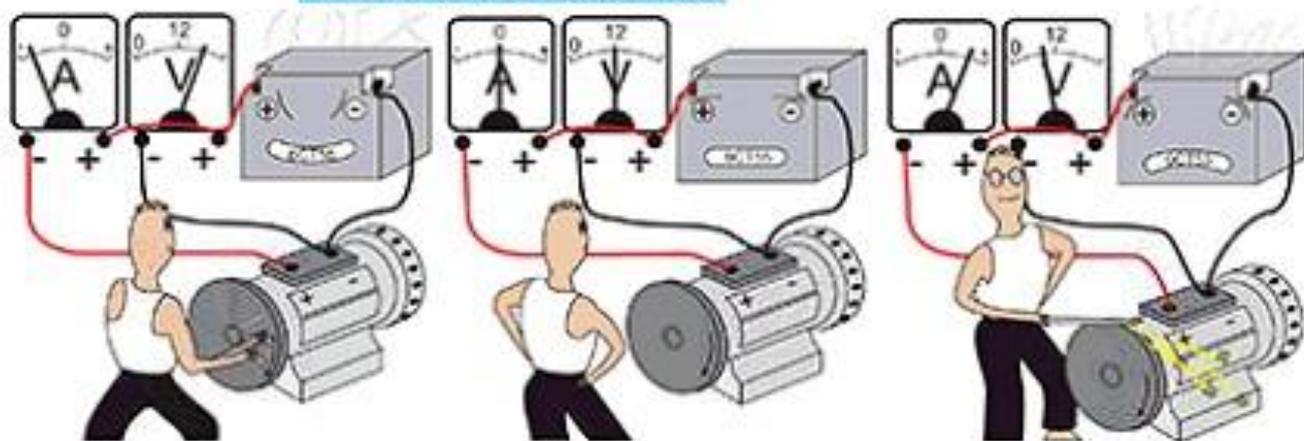


При низких частотах и постоянном напряжении



2.1. Расчетные схемы источников энергии

Баланс мощностей

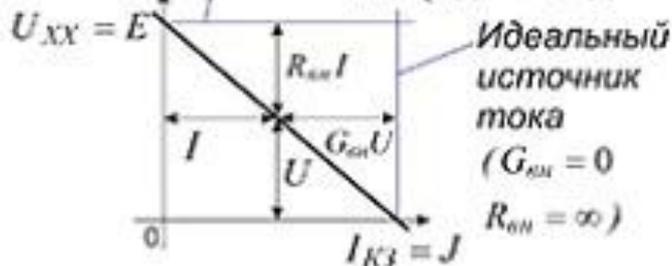


Вольт-амперные характеристики



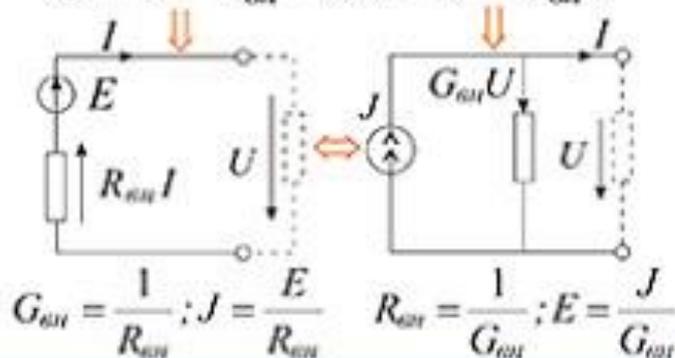
Расчетные схемы

Источник ЭДС ($R_{вн} = 0, G_{вн} = \infty$)

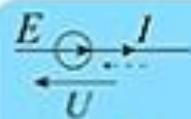


Идеальный источник тока ($G_{вн} = 0, R_{вн} = \infty$)

$$U = E - R_{вн} I \Leftrightarrow I = J - G_{вн} U$$

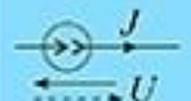


$$G_{вн} = \frac{1}{R_{вн}}; J = \frac{E}{R_{вн}} \quad R_{вн} = \frac{1}{G_{вн}}; E = \frac{J}{G_{вн}}$$



$$P = \pm EI$$

(источник)



$$P = \pm JU$$

(источник)



$$P = UI = RI^2 = GU^2$$

(потребитель)

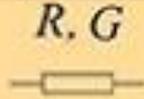
$$\Sigma P_{ист.} = \Sigma P_{потреб.}$$

$$\Sigma(\pm EI \pm JU) = \Sigma RI^2$$

Часть слагаемых < 0 Все слагаемые > 0

2.2. Обобщенная ветвь цепи постоянного тока Преобразования расчетных схем

Элементы
расчетных
схем

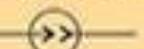


R, G

$E = const$



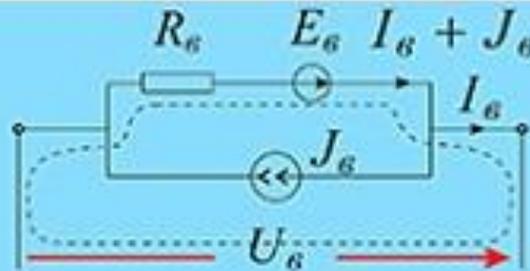
$J = const$



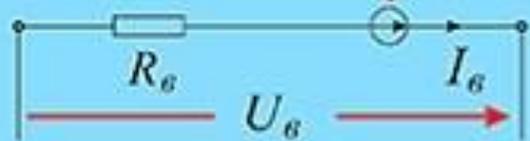
$U = 0$

$I = 0$

Обобщенная
ветвь и её
преобра-
зования



$$R_e I_e - U_e = E_e - R_e J_e$$

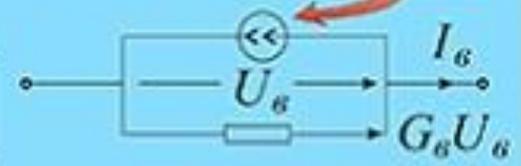


$$R_e(I_e + J_e) - U_e = E_e$$

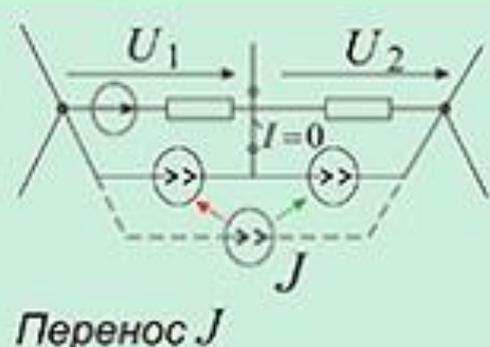
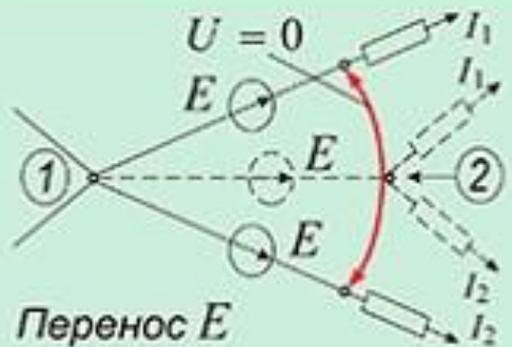
$$U_e + E_e = R_e(I_e + J_e)$$

$$I_e + J_e = G_e(U_e + E_e)$$

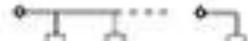
$$G_e U_e - I_e = J_e - G_e E_e$$



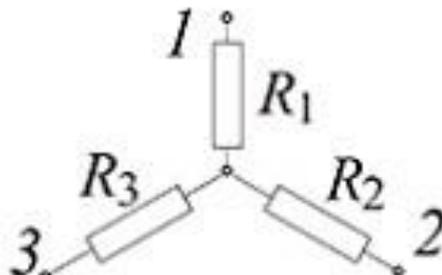
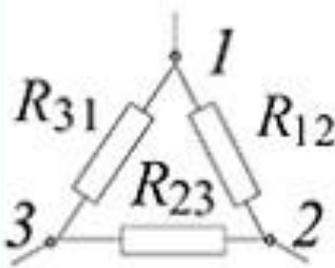
Устранение
идеальных
источников



$$R = R_1 + R_2 + \dots$$



$$G_3 = G_1 + G_2 + \dots$$

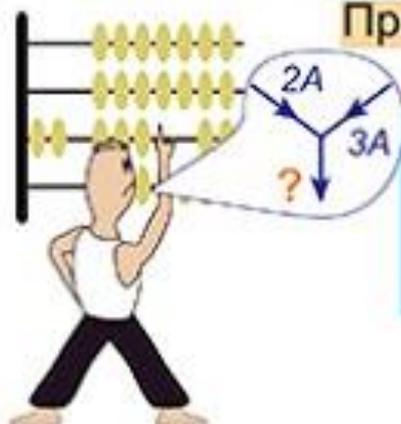


$$R_{12} = R_1 + R_2 + \frac{R_1 R_2}{R_3}$$

$$R_1 = \frac{R_{12} R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_1}$$

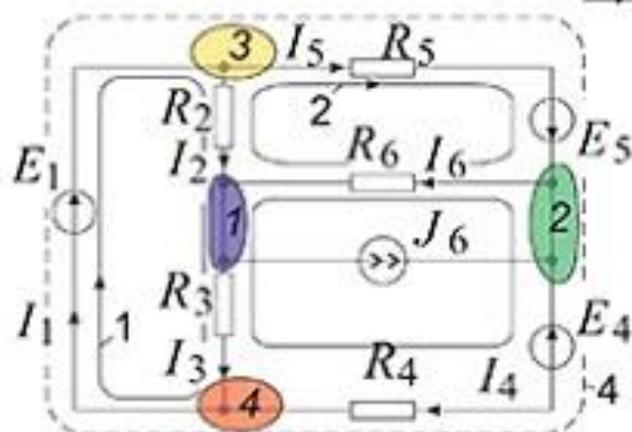
2.3. Задача расчета цепи

Применение законов Кирхгофа



- Известны: схема цепи (p ветвей, q узлов) и параметры всех ветвей R, E, J
- Определить: токи и напряжения на всех ветвях

Пример



В схеме 6 неизвестных токов -
- нужно 6 независимых уравнений

Для узлов:

$$1 \quad -I_2 - I_6 + I_3 + J_6 = 0$$

$$2 \quad I_4 + I_6 - I_5 - J_6 = 0$$

$$3 \quad +I_2 - I_1 + I_5 = 0$$

Это уравнение не годится -
- оно является суммой 3-х первых

$$4 \quad -J_4 - I_1 + I_3 = 0$$

Для контуров:

$$1 \quad +R_2 I_2 + R_3 I_3 = E_1$$

$$2 \quad -R_2 I_2 + R_5 I_5 + R_6 I_6 = E_5$$

$$3 \quad R_6 I_6 + U_{J_6} = 0$$

$$3 \quad R_4 I_4 - R_3 I_3 - R_6 I_6 = -E_4$$

Не годится -
- сумма трех первых

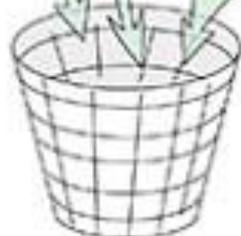
$$4 \quad R_4 I_4 + R_5 I_5 = E_1 + E_5 - E_4$$

Это уравнение не
годится, т.к. в нем
новая неизвестная
величина

По первому закону $(q - 1)$ уравнений

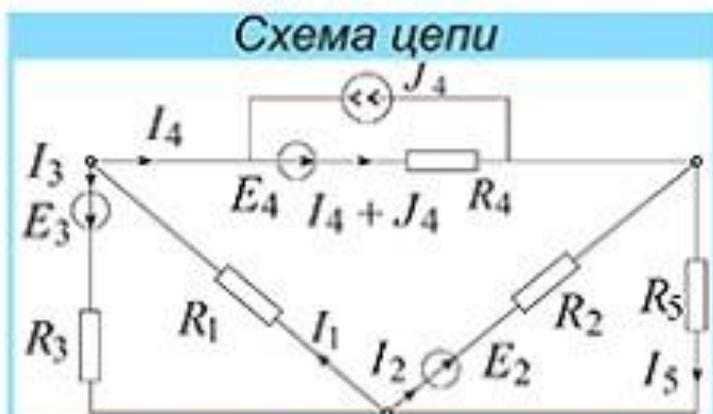
По второму: $p - (q - 1)$

(p - число ветвей без источников тока!)



2.4. Топологические понятия и матрицы

Матричные уравнения цепи



Направленный граф цепи



Матрицы параметров ветвей

$$\mathbf{R}_6 = \begin{bmatrix} R_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & R_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & R_5 \end{bmatrix}; \mathbf{G}_6 = \mathbf{R}_6^{-1};$$

$$\mathbf{E}_6 = [0 \ E_2 \ E_3 \ E_4 \ 0]^T; \mathbf{J}_6 = \dots$$

Узловая матрица

№№ узлов	№№ ветвей				
	1	2	3	4	5
1	-1	0	+1	+1	0
2	0	-1	0	-1	+1
3	+1	+1	-1	0	-1
Σ	0	0	0	0	0

Закон Ома $\mathbf{U}_6 + \mathbf{E}_6 = \mathbf{R}_6(\mathbf{I}_6 + \mathbf{J}_6)$

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 + E_2 \\ U_3 + E_3 \\ U_4 + E_4 \\ U_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 I_1 \\ R_2 I_2 \\ R_3 I_3 \\ R_4 (I_4 + J_4) \\ R_5 I_5 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Законы Кирхгофа

$$\mathbf{A}\mathbf{I}_6 = 0 \quad \mathbf{K}\mathbf{U}_6 = 0$$

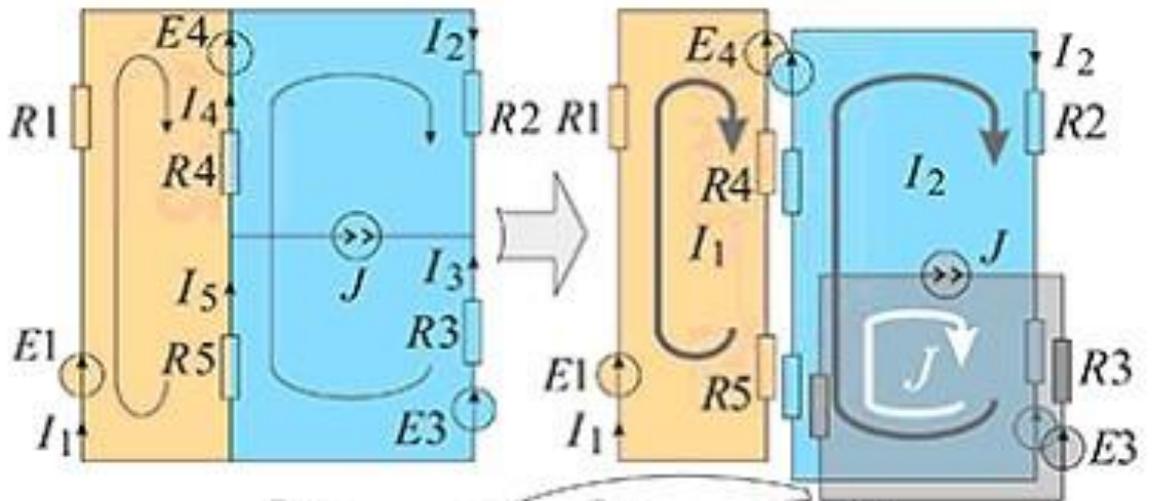
Контурная матрица

№№ контуров	№№ ветвей				
	1	2	3	4	5
3	1	0	1	0	0
4	1	-1	0	1	0
5	0	1	0	0	1

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ \vdots \\ I_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -I_1 + I_3 + I_4 \\ -I_2 - I_4 + I_5 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1 + U_3 \\ U_1 - U_2 + U_4 \\ U_2 + U_5 \end{bmatrix} = 0$$

2.5. Метод контурных токов



$$\begin{array}{c}
 R_{11} \quad R_{12} \quad R_{13} \quad E_{11} \\
 \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \\
 (R_1 + R_4 + R_5) \cdot I_1 \quad -(R_4 + R_5) \cdot I_2 \quad -R_5 J = E_1 - E_4 + R_5 J \\
 -(R_4 + R_5) \cdot I_1 \quad +(R_2 + R_3 + R_4 + R_5) \cdot I_2 \quad +(R_3 + R_5) J = E_4 - E_3 - (R_3 + R_5) J \\
 \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\
 R_{21} \quad R_{22} \quad R_{23} \quad E_{22}
 \end{array}$$

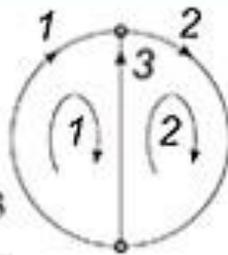
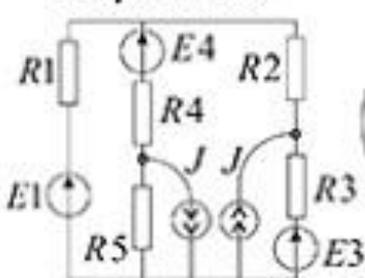
$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} E_{11} \\ E_{22} \end{bmatrix}; \quad I_3 = I_2 + J; \\
 I_4 = I_2 - I_1; \quad I_5 = J + I_2 - I_1$$

Контурные уравнения в матричной форме

$$R_k I_k = E_k, \text{ где } R_k = K \cdot R_e \cdot K^T \quad E_k = K(E_e - R_e J_e)$$

$$\text{Токи ветвей: } I_e = K^T \cdot I_k$$

Перенос J



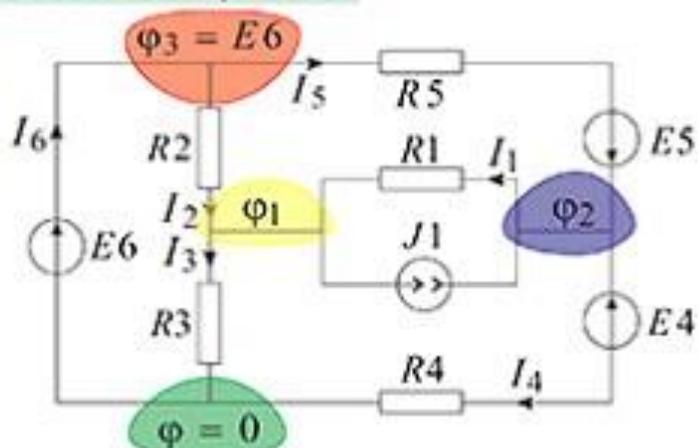
$$K = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}; \quad E_e - R_e J_e = \begin{bmatrix} E_1 \\ -E_3 - R_3 \cdot J \\ E_4 - R_5 \cdot J \end{bmatrix}$$

$$R_e = \begin{bmatrix} R_1 & 0 & 0 \\ 0 & R_2 + R_3 & 0 \\ 0 & 0 & R_4 + R_5 \end{bmatrix};$$

$$K(E_e - R_e J_e) = \begin{bmatrix} E_1 - E_4 + R_5 J \\ -E_3 - R_3 J + E_4 - R_5 J \end{bmatrix}; \quad R_k = K R_e K^T = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{bmatrix}$$

2.6. Метод узловых потенциалов

Шесть неизвестных токов, но только 2 неизвестных потенциала!



$$(G_1 + G_2 + G_3) \cdot \varphi_1 - G_1 \cdot \varphi_2 - G_2 \cdot \varphi_3 = -J_1 + G_2 \cdot E_6$$

$$-G_1 \cdot \varphi_1 + (G_1 + G_4 + G_5) \cdot \varphi_2 - G_5 \cdot \varphi_3 = J_1 + G_5 \cdot E_5 + G_4 \cdot E_4 + G_5 \cdot E_6$$

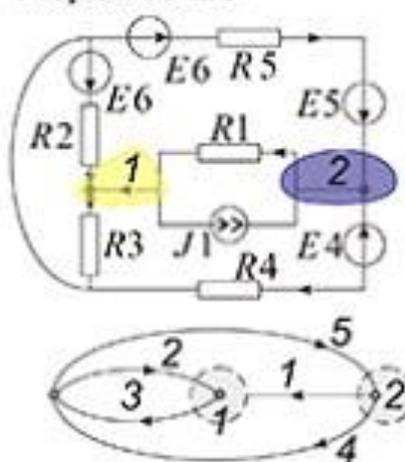
$$\begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} J_{11} \\ J_{22} \end{bmatrix}; \quad I_1 = G_1(\varphi_2 - \varphi_1); \quad I_3 = G_3 \cdot \varphi_1; \quad I_5 = G_5(E_6 - \varphi_2 + E_5) \\ I_2 = G_2(E_6 - \varphi_1); \quad I_4 = G_4(\varphi_2 - E_4); \quad I_6 = I_2 + I_5.$$

Узловые уравнения в матричной форме

$$\mathbf{G} \boldsymbol{\varphi} = \mathbf{J}, \quad \text{где} \quad \mathbf{G} = \mathbf{A} \mathbf{G}_e \mathbf{A}^T, \quad \mathbf{J} = \mathbf{A} (\mathbf{J}_e - \mathbf{G}_e \cdot \mathbf{E}_e)$$

Напряжения ветвей: $\mathbf{U}_e = \mathbf{A}^T \boldsymbol{\varphi}$

Перенос E_6

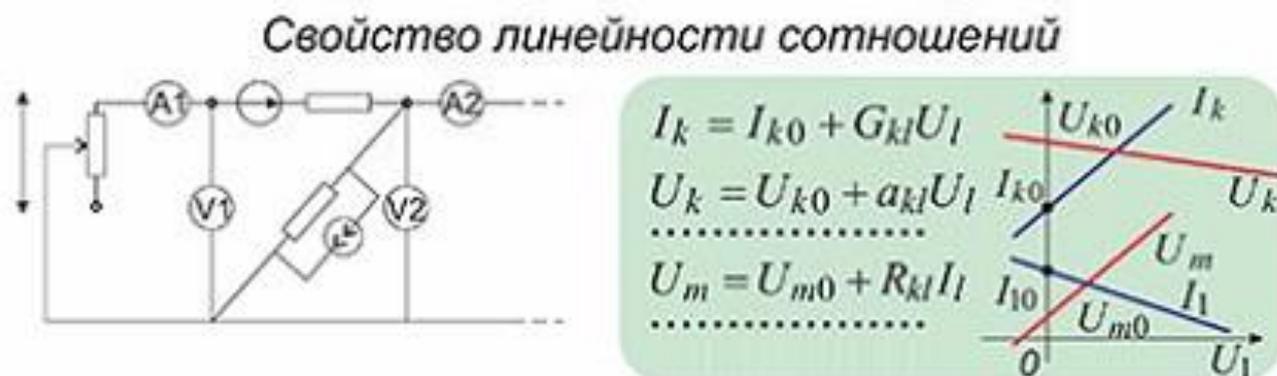
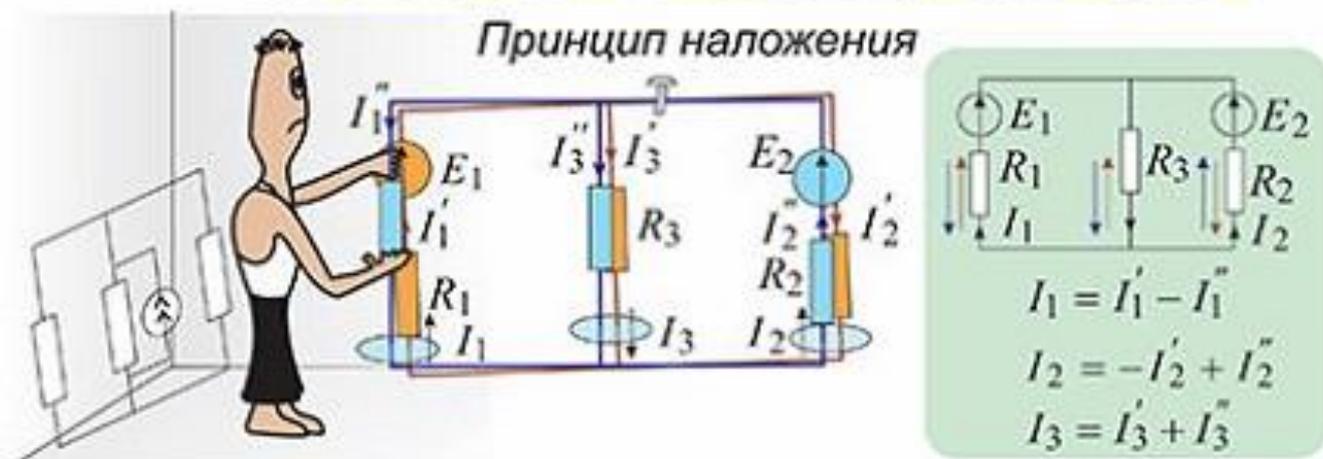


$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{G}_e = \begin{bmatrix} G_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & G_5 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{J}_e - \mathbf{G}_e \mathbf{E}_e = \begin{bmatrix} J_1 \\ -G_2 \cdot E_6 \\ 0 \\ G_4 \cdot E_4 \\ -G_5(E_5 + E_6) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} (\mathbf{J}_e - \mathbf{G}_e \cdot \mathbf{E}_e) = \begin{bmatrix} -J_1 + G_2 \cdot E_6 \\ J_1 + G_4 \cdot E_4 + G_5(E_5 + E_6) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{G} = \mathbf{A} \mathbf{G}_e \mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} G_1 + G_2 + G_3 & -G_1 \\ -G_1 & G_1 + G_4 + G_5 \end{bmatrix}$$

2.7. Свойства линейных электрических цепей

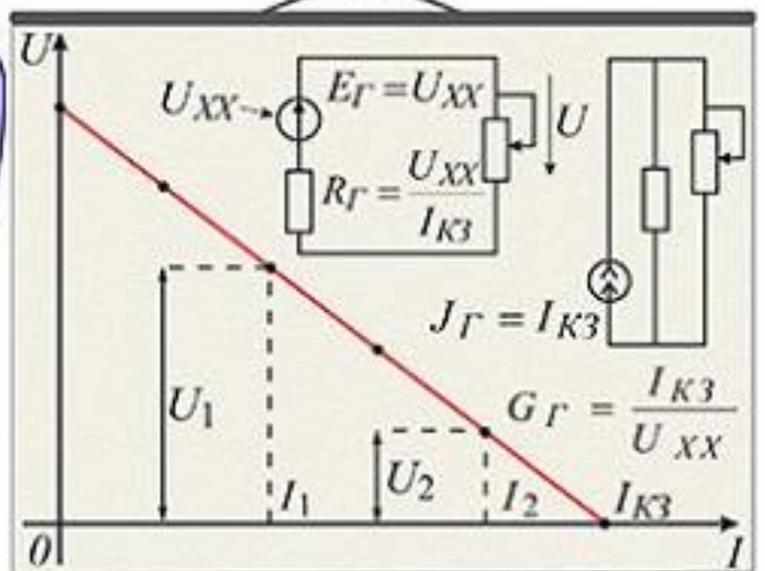
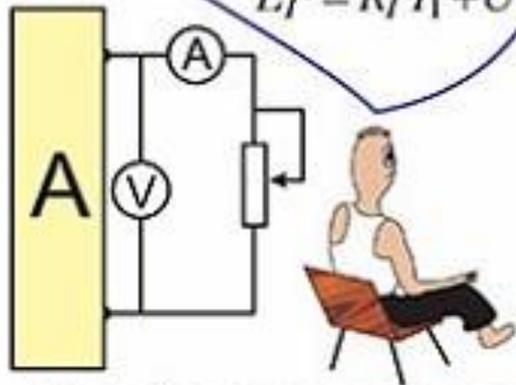


2.8. Метод эквивалентного генератора

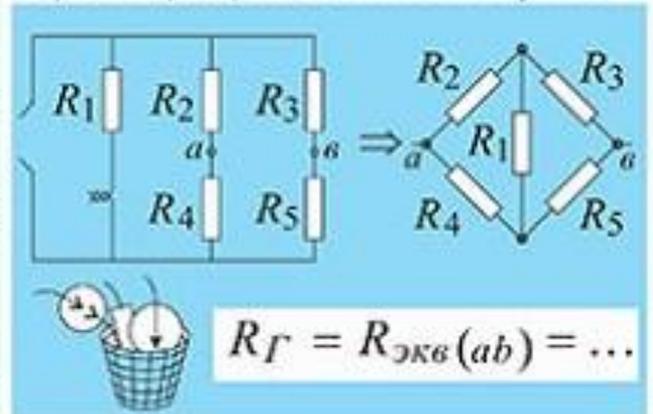
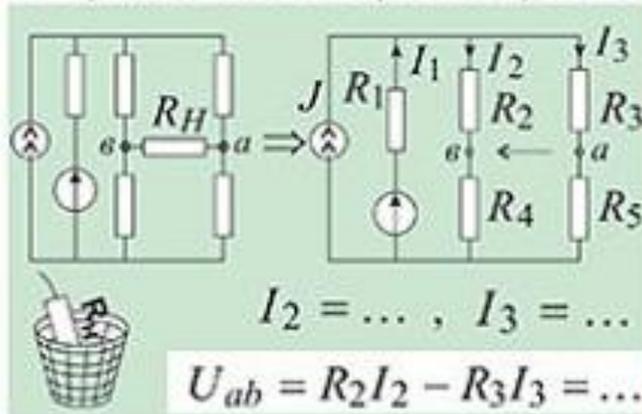
По любым двум точкам:

$$R_{\Gamma} = \frac{U_1 - U_2}{I_2 - I_1}$$

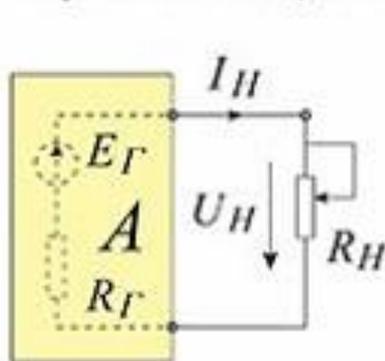
$$E_{\Gamma} = R_{\Gamma} I_1 + U_1$$



Определение параметров генератора расчетным путем



Передача мощности от активного двухполюсника к нагрузке



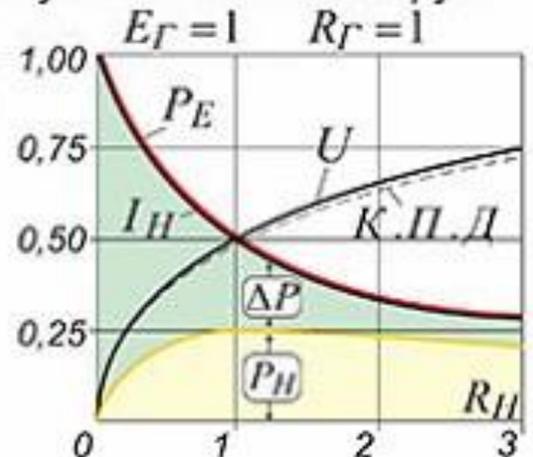
$$I_H = \frac{E_{\Gamma}}{R_{\Gamma} + R_H}$$

$$U_H = I_H R_H$$

$$P_H = U_H I_H$$

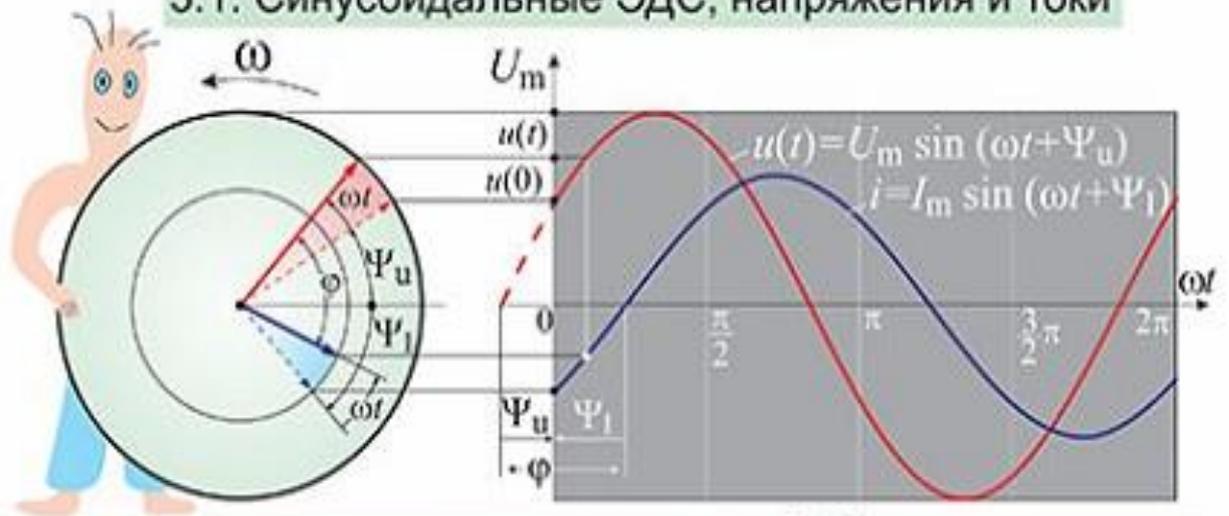
$$P_E = E_{\Gamma} I_H$$

$$\text{К.П.Д.} = \frac{P_H}{P_E}$$



3. Электрические цепи синусоидального тока

3.1. Синусоидальные ЭДС, напряжения и токи

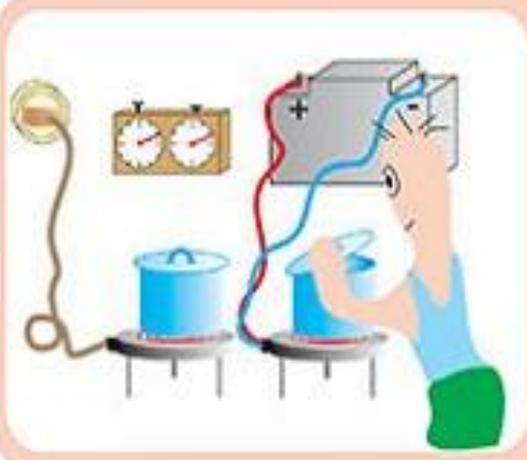


Частота f [Гц], период $T = 1/f$ [с]

Круговая частота ω [1/с]: $\omega T = 2\pi$; $\omega = 2\pi/T = 2\pi f$

Сдвиг по фазе $\varphi = \Psi_u - \Psi_i$ [рад, град]

(На рис: $\Psi_u > 0$, $\Psi_i < 0$, $\varphi > 0$, напряжение опережает ток)



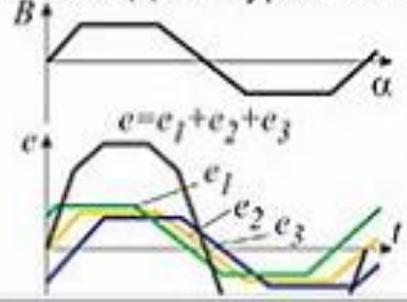
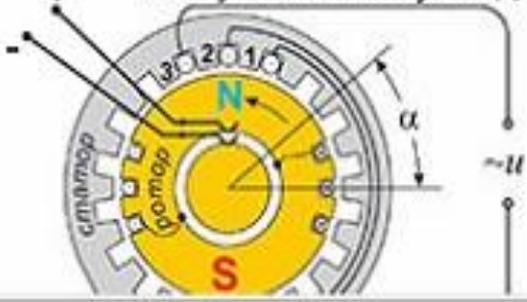
Действующее значение тока

$$P_{\sim} = i^2 R \quad P_{=} = I^2 R$$

$$W_{\sim} = \int_0^T i^2 R dt \Leftrightarrow W_{=} = I^2 RT$$

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T I_m^2 \sin^2 \omega t dt} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$$

Получение синусоидальных ЭДС в турбогенераторе



$f = 50$ Гц

$T = 0,02$ с

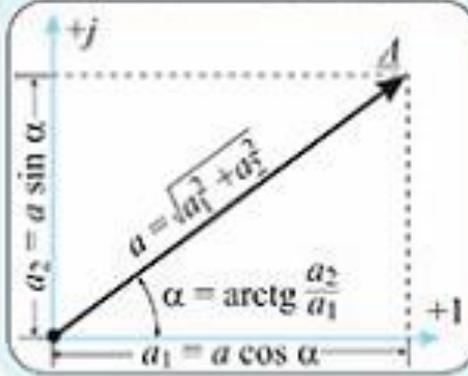
$n = 50 \frac{\text{об}}{\text{с}} = 3000 \frac{\text{об}}{\text{мин}}$

3.2 Представление синусоидальных функций времени комплексными числами

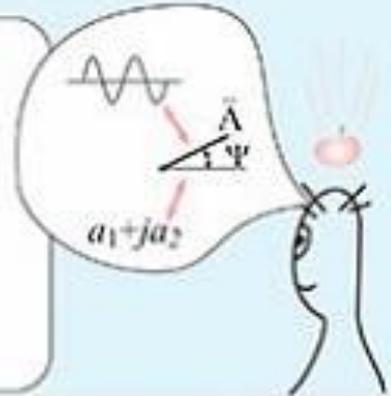
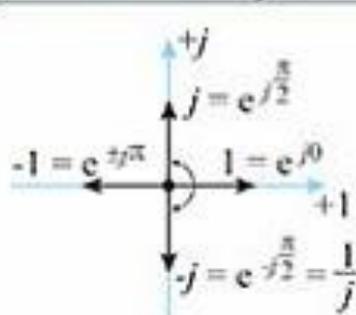
Комплексное число:

$$\underline{A} = a_1 + ja_2 = a (\cos \alpha + j \sin \alpha) = a e^{j\alpha}, \text{ где } j = \sqrt{-1}$$

Графическая интерпретация



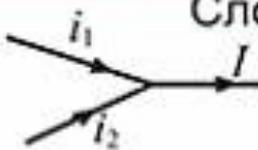
Частные случаи



Различные представления синусоидального тока

Графическое	Аналитическое		Комплексное	Векторное
	$i = I_m \sin(\omega t + \Psi)$	Мгновенное	$\dot{i} = I_m e^{j(\omega t + \Psi)}$	
	I_m	Амплитудное	$\dot{i}_m = I_m e^{j\Psi}$	
	$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$	Действующее	$i = \frac{\dot{i}_m}{\sqrt{2}} = I e^{j\Psi}$	

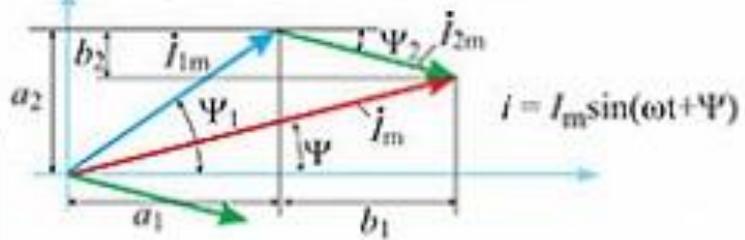
Сложение синусоидальных токов



$$i_1 = I_{1m} \sin(\omega t + \Psi_1)$$

$$i_2 = I_{2m} \sin(\omega t + \Psi_2)$$

$$i = i_1 + i_2 = ?$$



$$\dot{i}_{1m} = I_m e^{j\Psi_1} = a_1 + ja_2; \quad \dot{i}_{2m} = \dots = b_1 + jb_2$$

$$\dot{i}_m = (a_1 + b_1) + j(a_2 + b_2) = I_m e^{j\Psi}$$

3.3. Сопротивление, индуктивность и емкость в цепи синусоидального тока

R $i = I_m \sin \omega t$
 $u = ?$

$u = Ri = RI_m \sin \omega t;$

$U_m = RI_m, U = RI;$
 $\varphi = \Psi_U - \Psi_I = 0$

$p = ui = U_m I_m \sin^2 \omega t = UI(1 - \cos 2\omega t)$

$\dot{U} = R\dot{i} \quad \xrightarrow{\quad} \dot{i} \quad \xrightarrow{\quad} \dot{U}$

L $i = I_m \sin \omega t$
 $u = ?$

$u = L \frac{di}{dt} = \omega L I_m \cos \omega t =$
 $= \omega L I_m \sin (\omega t + 90^\circ);$

$U_m = X_L I_m, U = X_L I;$
 $\varphi = \Psi_U - \Psi_I = 90^\circ$

$p = U_m I_m \cos \omega t \cdot \sin \omega t = UI \sin 2\omega t$

$\dot{U} = \omega L \dot{i} e^{j90^\circ} = jX_L \dot{i} \quad \dot{U} \uparrow \pi/2 \quad \dot{i} \rightarrow$

C $i = I_m \sin \omega t$
 $u = ?$

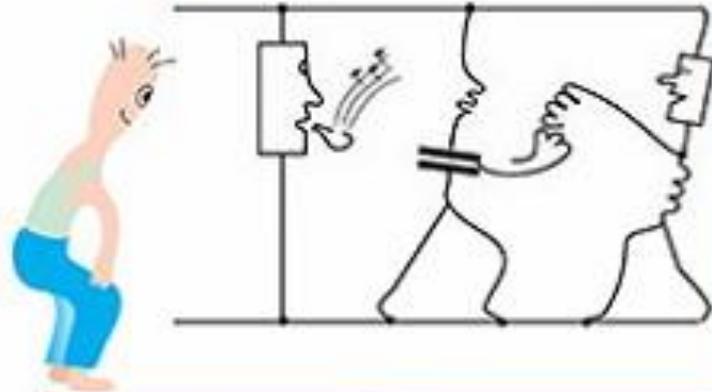
$u = \frac{1}{C} \int i dt = -\frac{I_m}{\omega C} \cos \omega t =$
 $= \frac{1}{\omega C} I_m \sin (\omega t - 90^\circ)$

$U_m = X_C I_m, U = X_C I;$
 $\varphi = \Psi_U - \Psi_I = -90^\circ$

$p = -U_m I_m \cos \omega t \cdot \sin \omega t = -UI \sin 2\omega t$

$\dot{U} = \omega C \dot{i} e^{j90^\circ} = jX_C \dot{i} \quad \dot{U} \downarrow -\pi/2 \quad \dot{i} \rightarrow$

3.4 Законы Ома и Кирхгофа в комплексной форме Комплексные сопротивление и проводимость



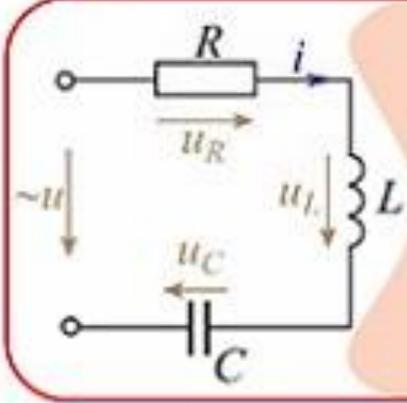
$$\sum i = 0$$

$$\sum i_m = 0; \sum i = 0$$

$$\sum \dot{U}_m e^{j\omega t} = \sum \dot{E}_m e^{j\omega t}$$

$$\sum \dot{U}_m = \sum \dot{E}_m$$

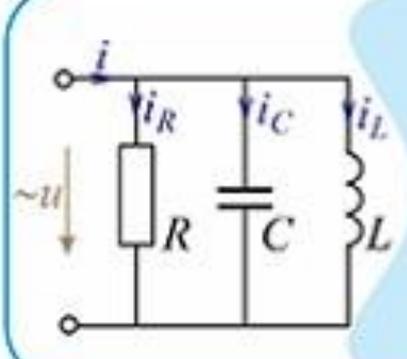
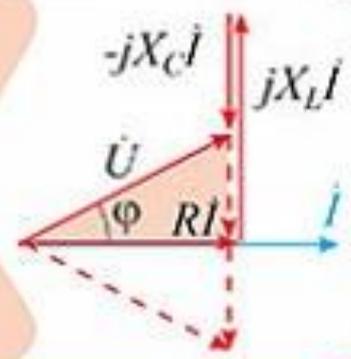
$$\sum u = 0 \quad \sum \dot{U} = \sum \dot{E}$$



$$\dot{U} = RI + j\omega LI - j\frac{1}{\omega C} I =$$

$$= [R + j(X_L - X_C)] I$$

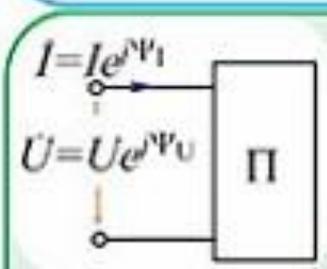
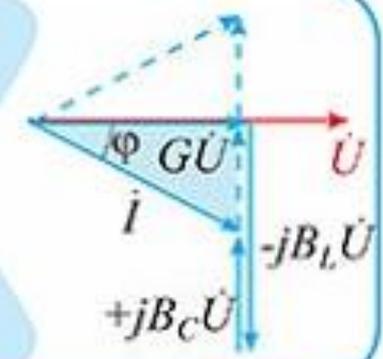
$$Z = R + jX = ze^{j\varphi}$$



$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{R} + \frac{\dot{U}}{j\omega L} + j\omega C \dot{U} =$$

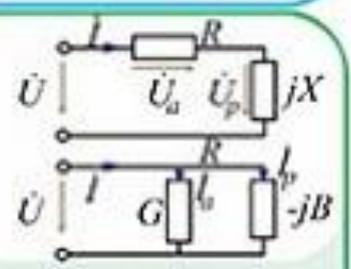
$$= [G - j(B_L - B_C)] \dot{U}$$

$$Y = G - jB = Ye^{j\varphi}$$



$$Z = \frac{U}{I} e^{j(\Psi_U - \Psi_I)} = Ze^{j\varphi} = R + jX \Leftrightarrow$$

$$Y = \frac{I}{U} e^{j(\Psi_I - \Psi_U)} = Ye^{j\varphi} = G - jB \Leftrightarrow$$



$$Y = \frac{1}{Z} = \frac{1}{R + jX} \cdot \frac{R - jX}{R - jX} = \frac{R}{R^2 + X^2} - j \frac{X}{R^2 + X^2}; \quad Z = \frac{1}{Y} = \frac{G}{G^2 + B^2} + j \frac{B}{G^2 + B^2};$$

3.5 Расчет разветвленных цепей синусоидального тока

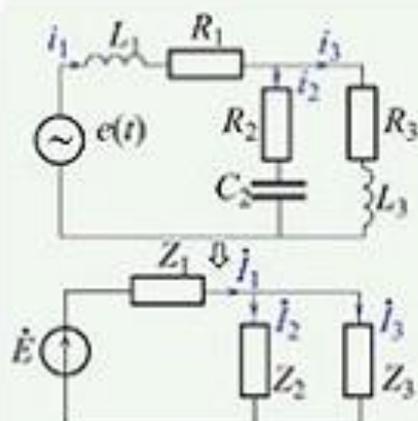


Задача расчета

Известны схема и параметры $R, L, C, e(t), J(t)$

Определить токи и напряжения на всех ветвях

1. Расчет комплексных сопротивлений и представление синусоид комплексными числами



$$\dot{E} = \frac{E_m}{\sqrt{2}} e^{j\omega t} = \dots$$

$$\omega = 2\pi f = \dots$$

$$X_{L1} = \omega L_1 = \dots$$

$$X_{L3} = \omega L_3 = \dots$$

$$X_{C2} = \frac{1}{\omega C_2} = \dots$$

$$Z_1 = R_1 + jX_{L1} = \dots \quad Z_2 = R_2 + jX_{C2} = \dots \quad Z_3 = R_3 + jX_{L3} = \dots$$

2. Расчет цепи, аналогичный, расчету цепи постоянного тока. (Сопровождается построением векторным диаграмм)

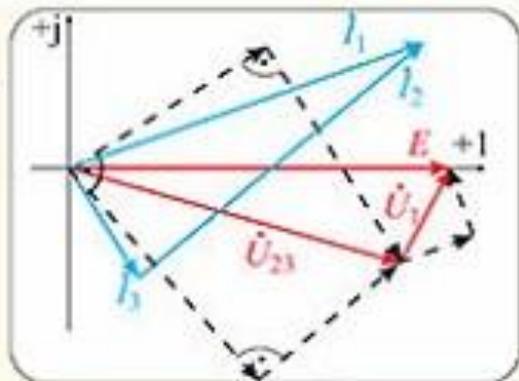
$$Z_{23} = \frac{Z_2 Z_3}{Z_2 + Z_3} = \dots$$

$$Z_3 = Z_1 + Z_{23} = \dots$$

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{E}}{Z_3} = \dots$$

$$\dot{U}_{23} = Z_{23} \dot{I}_1 = \dots$$

$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{U}_{23}}{Z_2} = \dots \quad \dot{I}_3 = \frac{\dot{U}_{23}}{Z_3} = \dots$$



Проверка:

$$I_1 = I_2 + I_3$$

$$\dot{E} = \dot{U}_{23} + \dot{U}_1$$

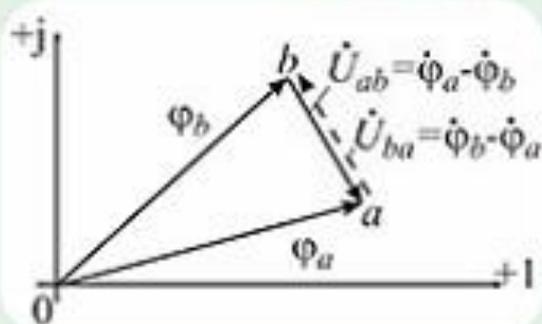
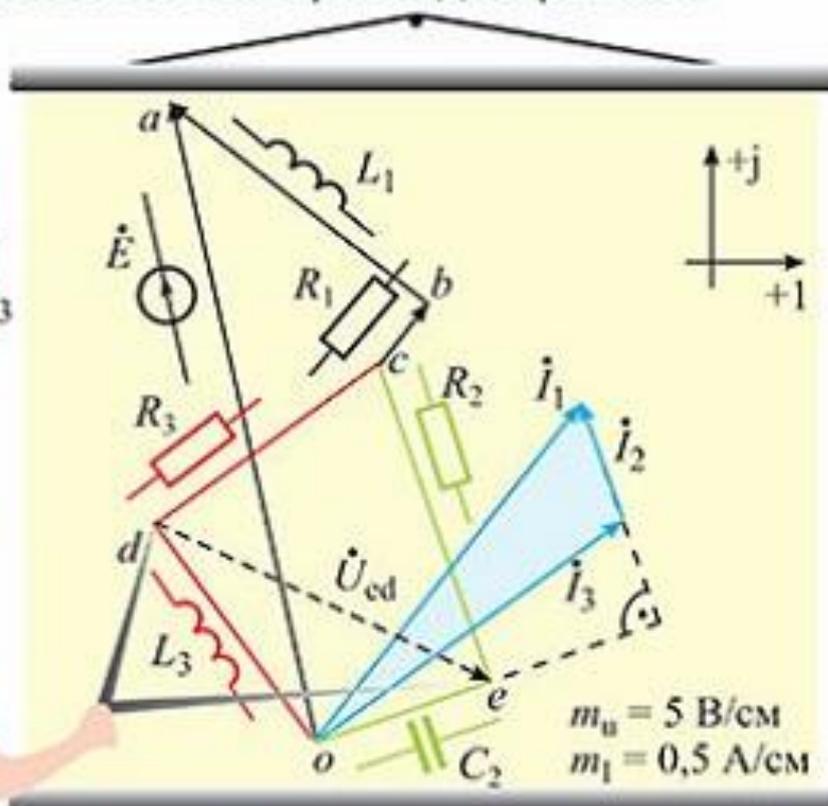
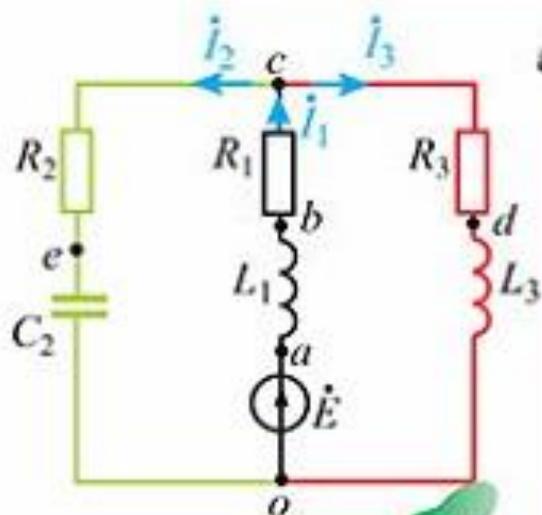
3. Переход от комплексных чисел к мгновенным значениям

$$i_1 = \sqrt{2} I_1 \sin(\omega t + \Psi) = \dots$$

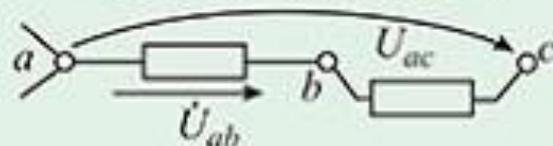
т.е. $\sqrt{2} |I_1| \cdot \sin[\omega t + \arg(I_1)]$

i_2, i_3, u_1, \dots - аналогично

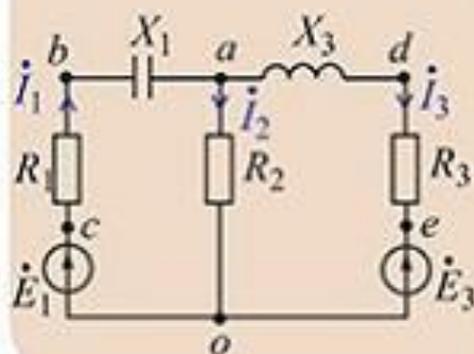
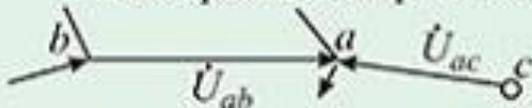
3.6 Топографические векторные диаграммы



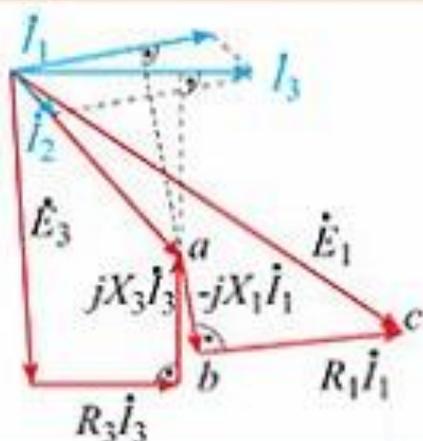
Условные положительные направления на схемах:



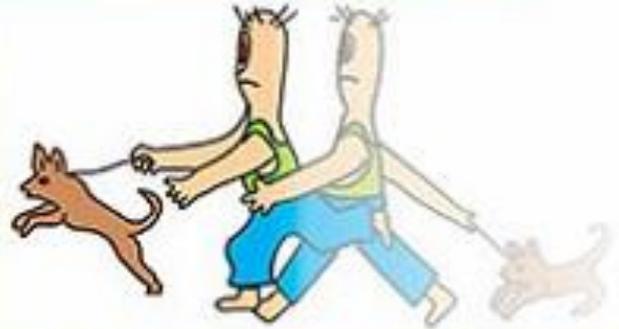
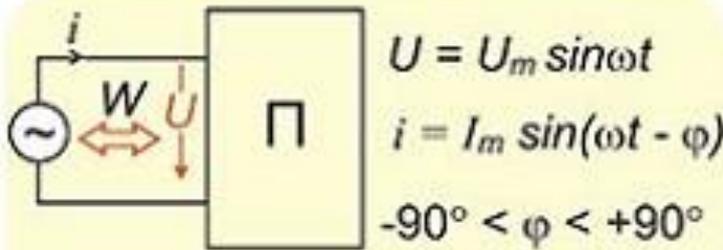
Векторы на диаграммах:



$$\begin{aligned} \dot{\phi}_0 &= 0 \\ \dot{\phi}_a &= R_2 \dot{I}_2 \\ \dot{\phi}_b &= \dot{\phi}_a - jX_1 \dot{I}_1 \\ \dot{\phi}_c &= \dot{\phi}_b + R_1 \dot{I}_1 = \dot{E}_1 \\ \dot{\phi}_d &= \dot{\phi}_a - jX_3 \dot{I}_3 \\ \dot{\phi}_e &= \dot{\phi}_d - R_3 \dot{I}_3 = \dot{E}_3 \end{aligned}$$



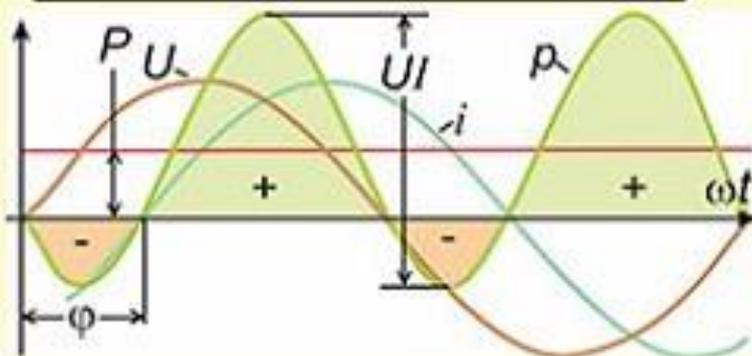
3.7 Мощности в цепи синусоидального тока



Мгновенная мощность :

$$P = ui = U_m I_m \sin \omega t \sin(\omega t - \varphi) = \sqrt{2} U \sqrt{2} I \frac{1}{2} [\cos \varphi - \cos(2\omega t - \varphi)];$$

$$P = UI \cos \varphi - UI \cos(2\omega t - \varphi)$$



Активная мощность :

$$P = UI \cos \varphi \text{ (Вт)}$$

Реактивная мощность:

$$Q = UI \sin \varphi \text{ (ВАр)}$$

Полная мощность :

$$S = UI \text{ (ВА)}$$



Коэффициент мощности :

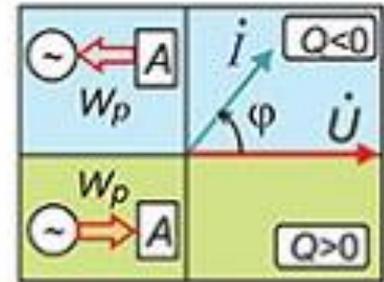
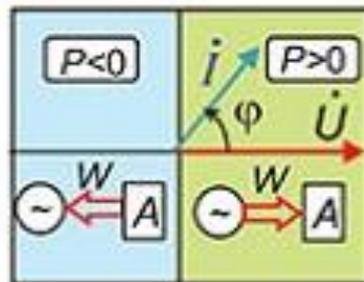
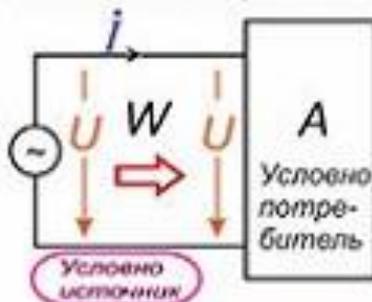
$$\frac{P}{S} = \cos \varphi$$

Комплексная мощность :

$$\tilde{S} = \dot{U} \dot{I}^* = U e^{j\varphi_U} \cdot I e^{j\varphi_I} = UI e^{j\varphi}$$

$$\tilde{S} = S e^{j\varphi} = S \cos \varphi + j S \sin \varphi = P + jQ$$

Знаки мощностей

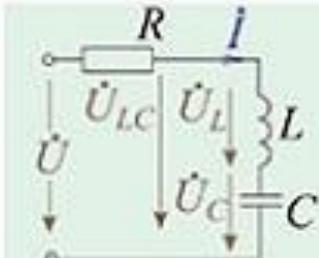


Баланс мощностей

$$\sum P_{ист} = \sum P_{потр} ; \quad \sum P_{ист} = \sum P_{потр} ; \quad \sum Q_{ист} = \sum Q_{потр} .$$

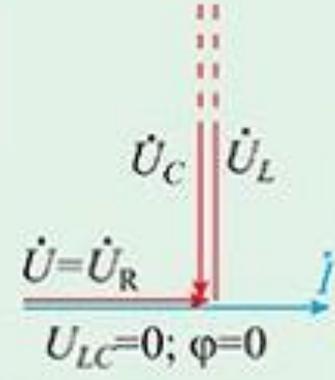
$$\sum \tilde{S}_{ист} = \sum \tilde{S}_{потр} .$$

3.8 Резонанс напряжений



$$X(\omega) = \omega L - \frac{1}{\omega C}$$

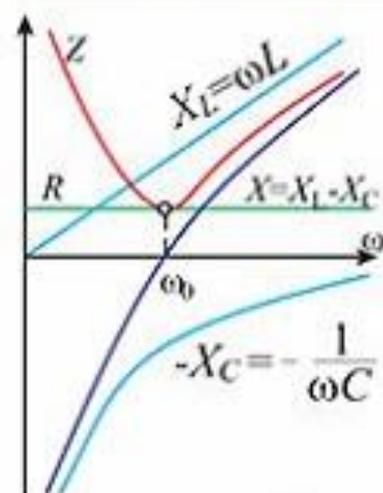
$$\omega^2 LC = 1; \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$



Характеристическое сопротивление

$$X_L = \omega_0 L = \frac{L}{\sqrt{LC}} = \sqrt{\frac{L}{C}} = \rho \quad X_C = \frac{1}{\omega_0 C} = \frac{\sqrt{LC}}{C} = \sqrt{\frac{L}{C}} = \rho$$

$$\frac{U_L}{U} = \frac{U_C}{U} = \frac{\rho I}{RI} = Q - \text{добротность. При } Q > 1 \quad U_L = U_C > U.$$



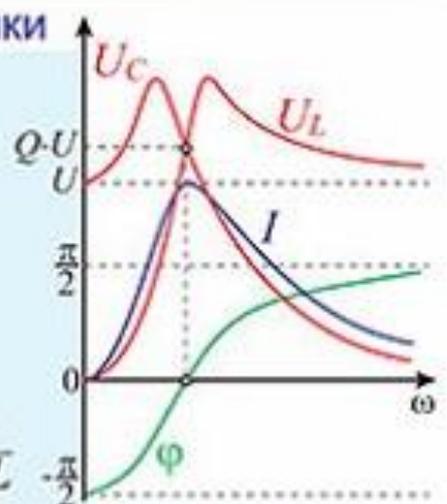
Частотные характеристики

$$Z(j\omega) = R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C});$$

$$Z(\omega) = \sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}$$

$$\varphi(\omega) = \arctg \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R};$$

$$I = \frac{U}{Z}; \quad U_L = \omega LI; \quad U_C = \frac{I}{\omega L}$$

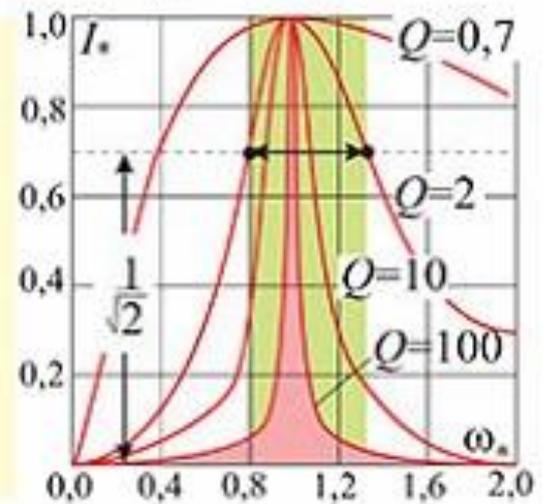


Влияние добротности

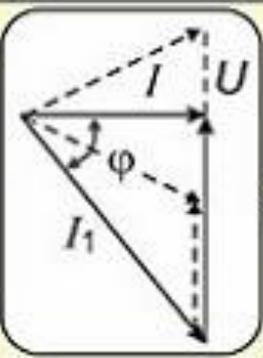
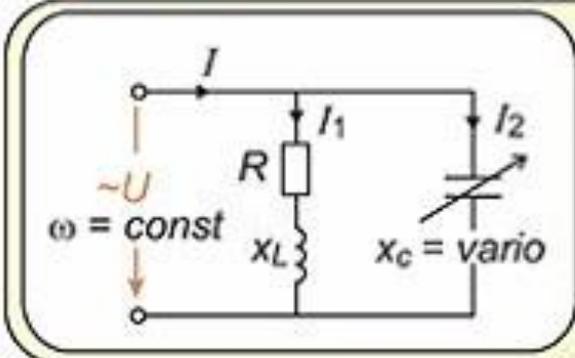
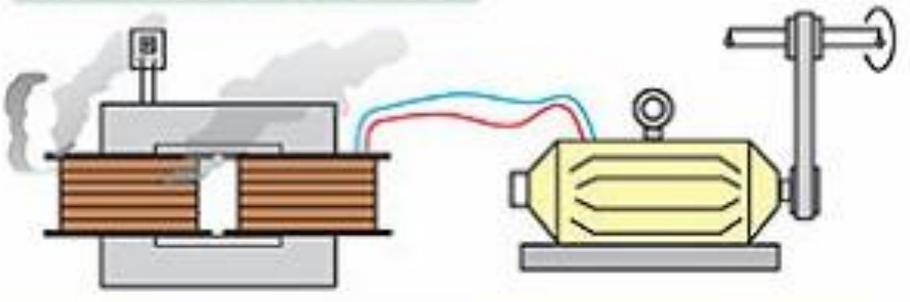
$$Z = \sqrt{R^2 + \frac{L}{C} (\omega \sqrt{LC} - \frac{1}{\omega \sqrt{LC}})^2} = R \sqrt{1 + Q^2 (\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega})^2}$$

$$I_s = \frac{I}{I_{рез}} = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2 (\omega_s - 1/\omega_s)^2}}$$

Полоса пропускания: $I_s \geq 1/\sqrt{2}$



3.9 Резонанс токов

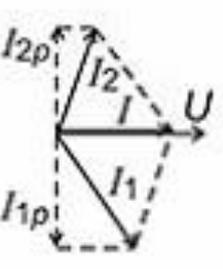
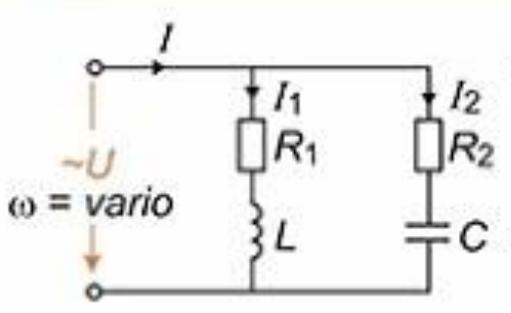


$$B = B_1 - B_2 = 0$$

$$\frac{\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2} = \omega C$$

$$Y = \sqrt{G^2 + B^2}; I = YU$$

$$P = UI \cos \varphi = \text{const}$$



$$\frac{\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2} = \frac{1/\omega C}{R_2^2 + 1/\omega^2 C^2}$$

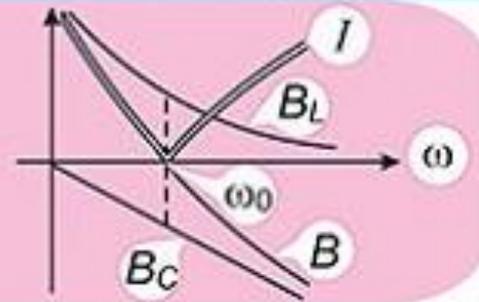
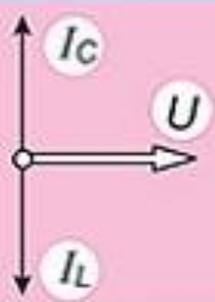
$$\omega_0' = \frac{1}{\sqrt{LC'}} \sqrt{\frac{(L/C) - R_1^2}{(L/C) - R_2^2}} = \omega_0 \sqrt{\frac{\rho^2 - R_1^2}{\rho^2 - R_2^2}}$$

Резонанс возможен, если $R_1 > \rho$ и $R_2 > \rho$, либо $R_1 < \rho$ и $R_2 < \rho$.

Если $R_1 = R_2 \neq \rho$, то $\omega_0' = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC'}}$

Если $R_1 = R_2 = \rho$, то $\omega_0' = \frac{0}{0} \Rightarrow$ резонанс при любой частоте

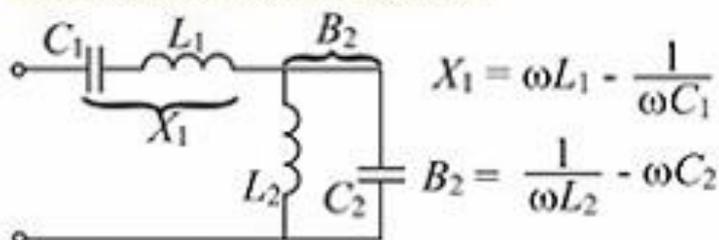
Если $R_1 = R_2 = 0$ (идеальный контур), то $\omega_0' = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC'}}$
 $I_L = I_C, I_{\text{рез}} = 0!$



3.10 Резонансы в сложных цепях

	Резонанс напряжений ($X = 0$)	Резонанс токов ($B = 0$)
В реальной цепи ($R \neq 0, G \neq 0$)	$B = \frac{X}{R^2 + X^2} = 0$	$X = \frac{B}{G^2 + B^2} = 0$
В идеальной цепи ($R = 0, G = 0$)	$B = \frac{1}{X} = \infty$	$X = \frac{1}{B} = \infty$

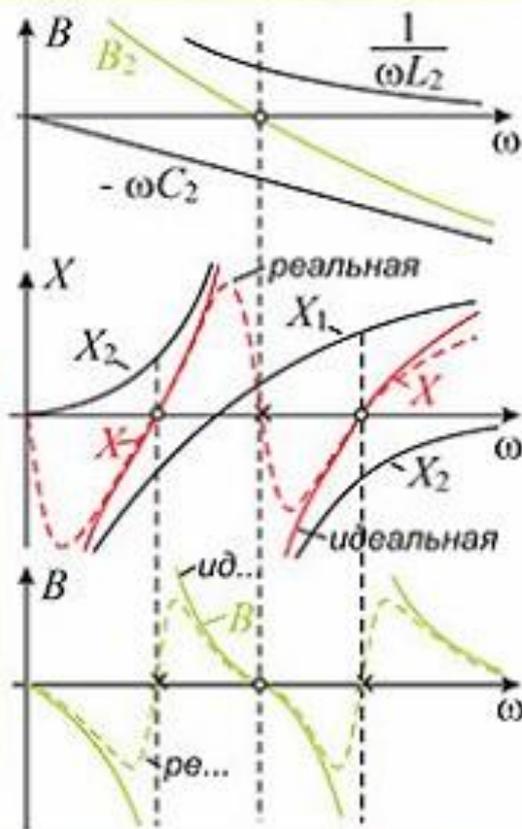
Задача: Построить вид зависимостей $X(\omega)$ и $B(\omega)$ для заданной схемы цепи



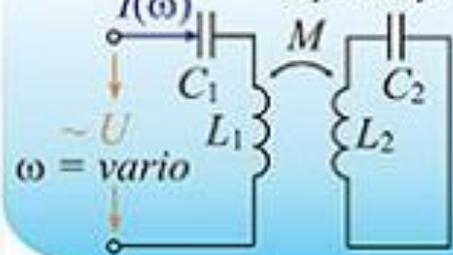
$X_2 = 1/B_2$ $X = X_1 + X_2$; $B = 1/X$

Свойства $X(\omega)$ и $B(\omega)$ при $R = G = 0$

- $X(\omega)$ - возрастают;
 $B(\omega)$ - убывают;
- Резонансы токов и напряжений чередуются;
- $X(0) = 0$ и $B(0) = \infty$, если есть путь для постоянного тока (иначе $X(0) = -\infty$ и $B = 0$);
- Число резонансов равно числу L и C без единицы (в канонических схемах)



Пример использования свойств

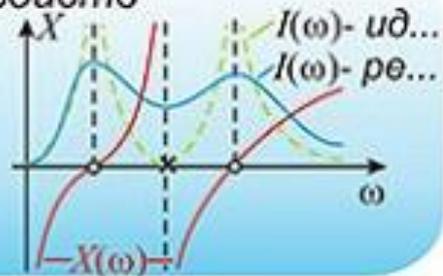


Число L и C : 4

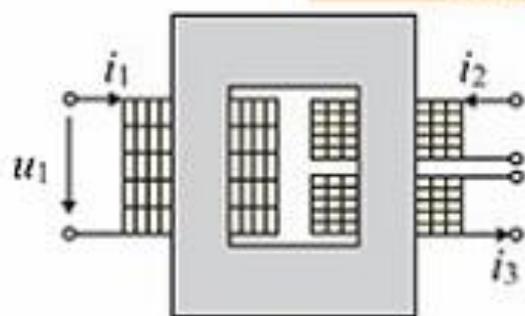
3 резонанса

$X_1(0) = -\infty$

$I = U/|X|$



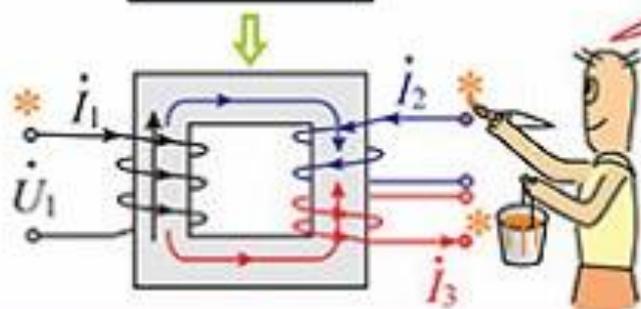
3.11 Особенности расчета цепей с индуктивными связями



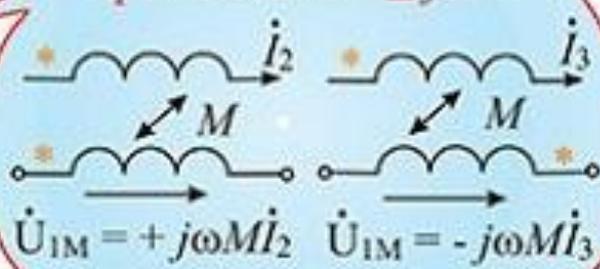
$$u_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} \pm M_{12} \frac{di_2}{dt} \pm M_{13} \frac{di_3}{dt};$$

$$i = I_m \sin(\omega t + \psi) \Rightarrow \dot{I}; u \Rightarrow \dot{U}$$

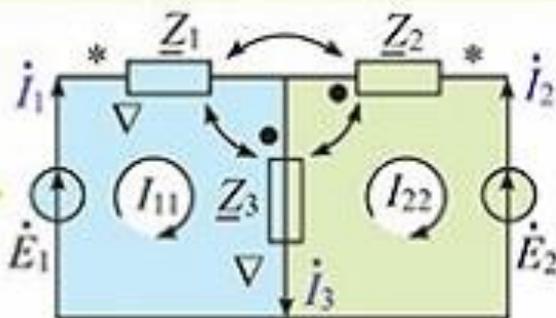
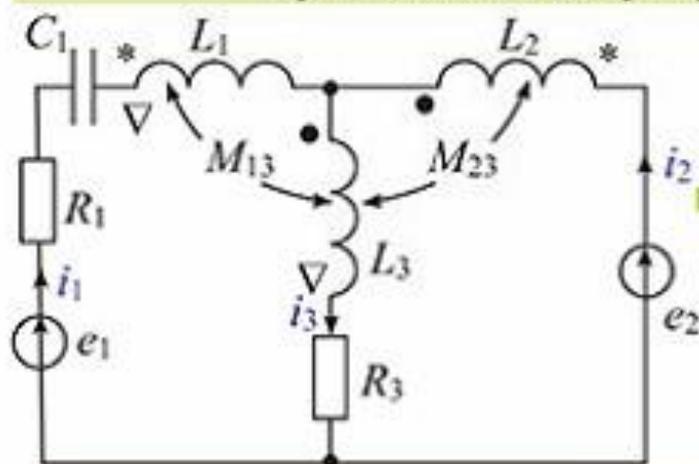
$$\dot{U}_1 = j\omega L_1 \dot{I}_1 + j\omega M_{12} \dot{I}_2 - j\omega M_{13} \dot{I}_3$$



Правило знака $\pm j\omega M$



Уравнения по второму закону Кирхгофа



$$\underline{Z}_1 = R_1 - jX_{C1} + jX_{L1}; \underline{Z}_2 = jX_{L2};$$

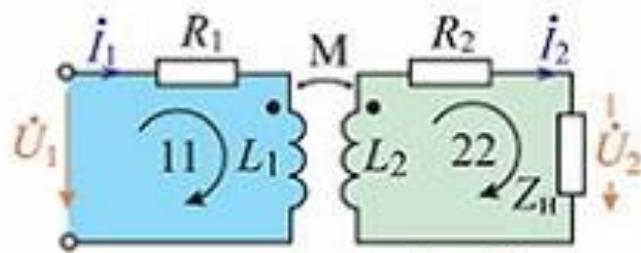
$$\underline{Z}_3 = R_3 + jX_{L3}; \underline{Z}_{Mik} = j\omega M_{ik}.$$

$$\begin{cases} \underline{Z}_1 \dot{I}_1 + \underline{Z}_{M12} \dot{I}_2 - \underline{Z}_{M13} \dot{I}_3 + \underline{Z}_3 \dot{I}_3 - \underline{Z}_{M13} \dot{I}_1 - \underline{Z}_{M23} \dot{I}_2 = \dot{E}_1 \\ -\underline{Z}_3 \dot{I}_3 + \underline{Z}_{M13} \dot{I}_1 + \underline{Z}_{M23} \dot{I}_2 - \underline{Z}_2 \dot{I}_2 - \underline{Z}_{M12} \dot{I}_1 + \underline{Z}_{M23} \dot{I}_1 = -\dot{E}_2 \end{cases}$$

Уравнения для контурных токов: $ZI = E$,

$$Z = \begin{bmatrix} \underline{Z}_1 + \underline{Z}_3 - 2\underline{Z}_{M13} & -\underline{Z}_3 - \underline{Z}_{M12} + \underline{Z}_{M13} + \underline{Z}_{M23} \\ -\underline{Z}_3 - \underline{Z}_{M12} + \underline{Z}_{M13} + \underline{Z}_{M23} & \underline{Z}_3 + \underline{Z}_2 - 2\underline{Z}_{M23} \end{bmatrix}; E = \begin{bmatrix} \dot{E}_1 \\ \dot{E}_2 \end{bmatrix}; I = \begin{bmatrix} \dot{I}_{11} \\ \dot{I}_{22} \end{bmatrix}$$

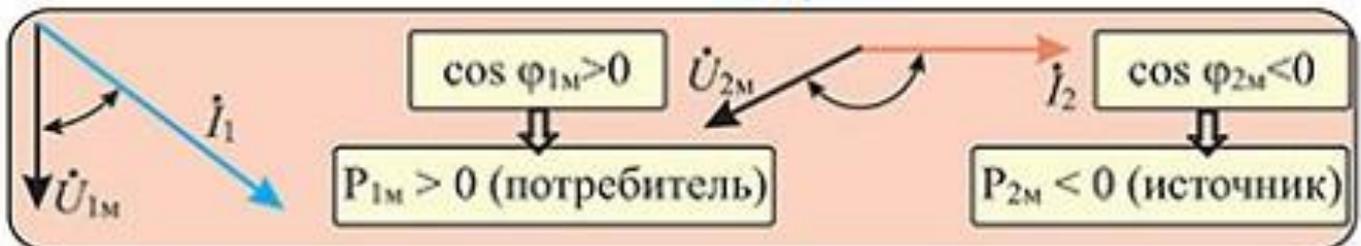
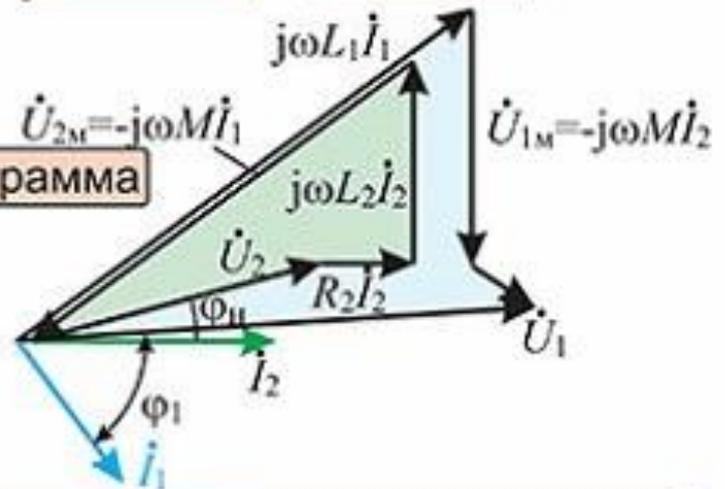
3.12. Понятие о трансформаторе



Уравнения и векторная диаграмма

$$R_1 \dot{I}_1 + j\omega L_1 \dot{I}_1 - j\omega M \dot{I}_2 = \dot{U}_1$$

$$R_2 \dot{I}_2 + j\omega L_2 \dot{I}_2 - j\omega M \dot{I}_1 + \dot{U}_2 = 0$$



Вносимое сопротивление

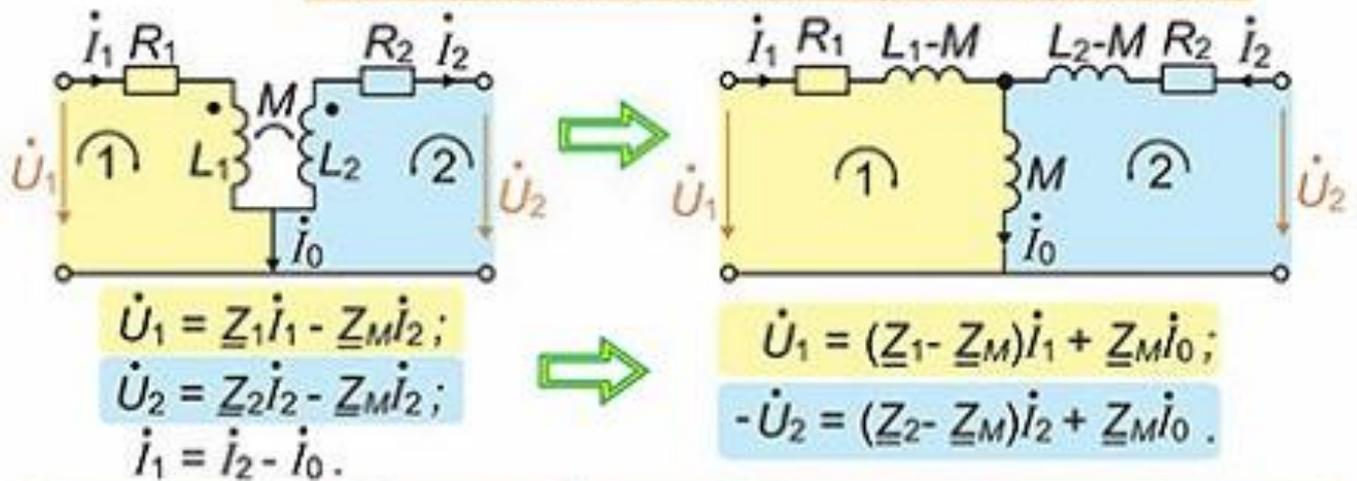
$$\begin{cases} Z_{11} \dot{I}_1 + Z_{12} \dot{I}_2 = \dot{U}_1 \\ Z_{21} \dot{I}_1 + Z_{22} \dot{I}_2 = 0 \end{cases} \quad \dot{I}_2 = -\dot{I}_1 \frac{Z_{21}}{Z_{22}}; \quad \dot{U}_1 = Z_{11} \dot{I}_1 - \frac{Z_{12} Z_{21}}{Z_{22}} \dot{I}_1, \text{ где } Z_{21} = Z_{12} = -jX_M.$$

$$Z_{\text{вх}} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} = Z_{11} + \frac{X_M^2}{R_{22} + jX_{22}} \rightarrow Z_{\text{вх}} - \text{вносимое сопротивление}$$

$$Z_{\text{вх}} = \frac{X_M^2}{(R_{22} + jX_{22})} \cdot \frac{R_{22} - jX_{22}}{R_{22} - jX_{22}} = R_{22} \underbrace{\frac{X_M^2}{R_{22}^2 + X_{22}^2}}_{R_{\text{вн}}} - jX_{22} \underbrace{\frac{X_M^2}{R_{22}^2 + X_{22}^2}}_{X_{\text{вн}}}$$

$R_{\text{вн}} > 0$ всегда, $X_{\text{вн}}$ - знак, противоположный знаку X_{22}

3.13 Схемы замещения трансформатора



Идеальный трансформатор

$R_1 = R_2 = 0, M = \sqrt{L_1 L_2} (k_{св} = 1), L_1 \rightarrow \infty, L_2 \rightarrow \infty$ и $M \rightarrow \infty$

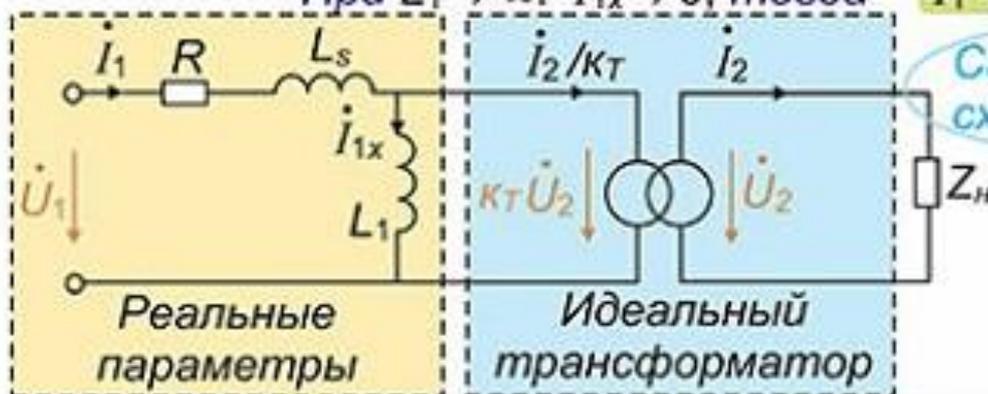
$$\dot{U}_1 = j\omega L_1 \dot{I}_1 - j\omega \sqrt{L_1 L_2} \dot{I}_2 = j\omega \sqrt{L_1} (\sqrt{L_1} \dot{I}_1 - \sqrt{L_2} \dot{I}_2); \quad (1)$$

$$\dot{U}_2 = j\omega \sqrt{L_1 L_2} \dot{I}_1 - j\omega L_2 \dot{I}_2 = j\omega \sqrt{L_2} (\sqrt{L_1} \dot{I}_1 - \sqrt{L_2} \dot{I}_2); \quad (2)$$

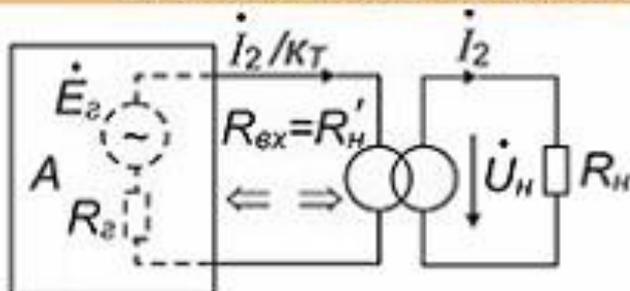
$$\frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2} = \sqrt{\frac{L_1}{L_2}} = \frac{W_1}{W_2} = k_T. \text{ Из (1): } \dot{I}_1 = \frac{\dot{U}_1}{j\omega L_1} + \frac{\sqrt{L_1 L_2}}{L_1} \dot{I}_2 = \dot{I}_{1x} + \frac{\dot{I}_2}{k_T}$$

При $L_1 \rightarrow \infty: \dot{I}_{1x} \rightarrow 0$, тогда

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_2 / k_T$$



Согласование по активному сопротивлению

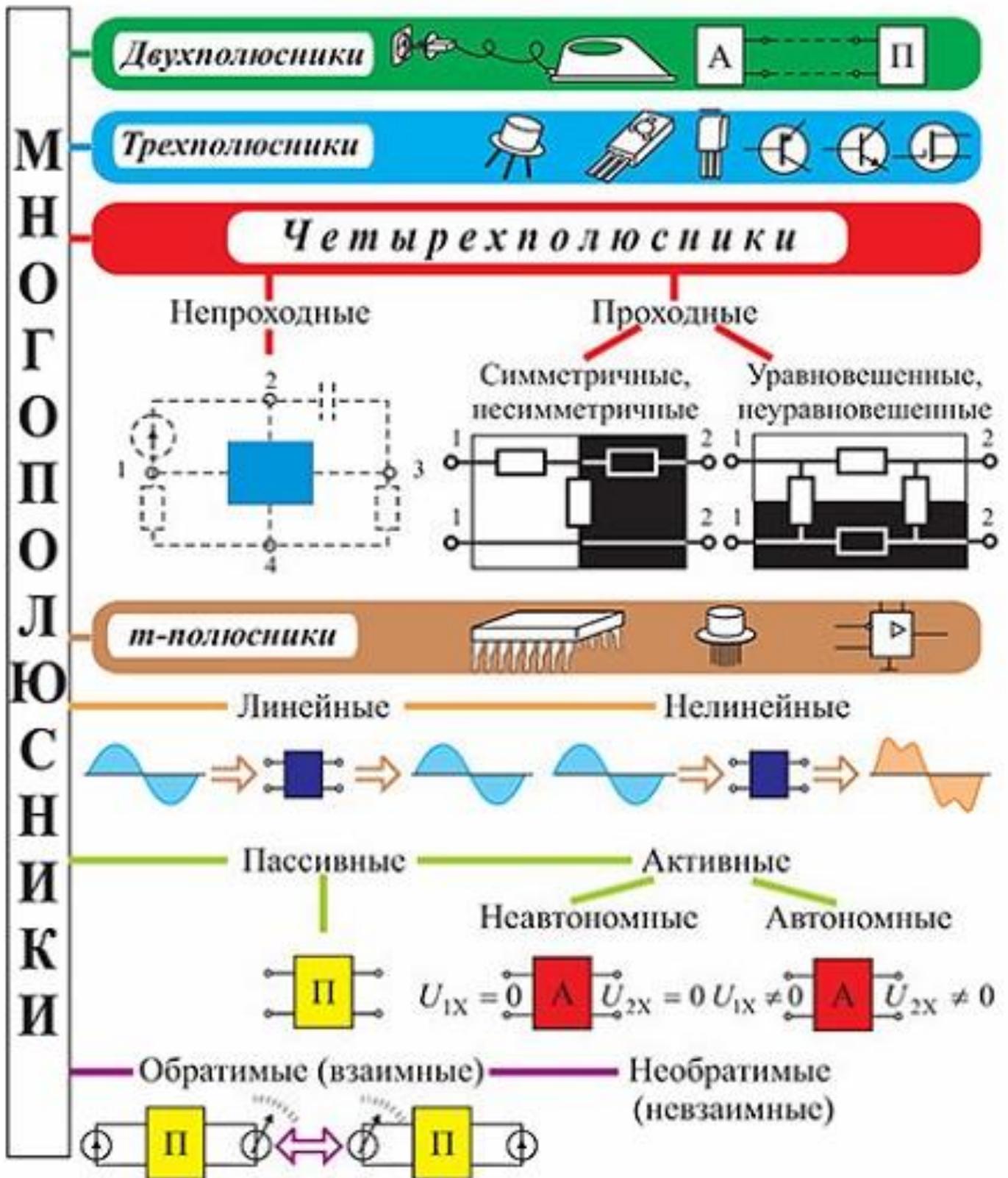


$$R'_n = \frac{k_T \dot{U}_н}{\dot{I}_2 / k_T} = k_T^2 R_n$$

$$R_2 = k_T^2 R_n \Rightarrow k_T = \sqrt{\frac{R_2}{R_n}}$$

4. Многополюсники и четырехполюсники

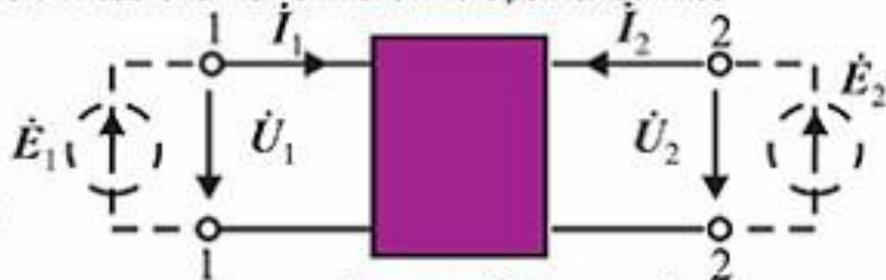
4.1 Классификация и примеры



4. Многополюсники и четырехполюсники

4.2 Уравнения и параметры

проходных пассивных и неавтономных активных четырехполюсников



$$\begin{aligned} \dot{I}_1 &= Y_{11}\dot{U}_1 + Y_{12}\dot{U}_2; \\ \dot{I}_2 &= Y_{21}\dot{U}_1 + Y_{22}\dot{U}_2 \end{aligned} \quad (Y)$$

Для обратимых: $Y_{21} = Y_{12}$! (принцип взаимности)

Короче: $\mathbf{I} = \mathbf{YU}$ (Y) или $\mathbf{U} = \mathbf{ZI}$ (Z)

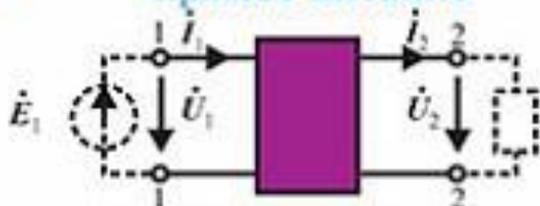
Другие варианты:

$$\begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{U}_2 \end{bmatrix} \quad (H)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{U}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix} \quad (G)$$

Еще два варианта:

прямое питание



Из уравнений (Y) с изменением знака \dot{I}_2

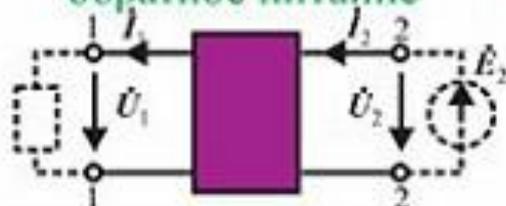
$$\dot{U}_1 = -\frac{Y_{22}}{Y_{21}} \cdot \dot{U}_2 - \frac{1}{Y_{21}} \dot{I}_2;$$

$$\dot{I}_1 = -\left(\frac{Y_{11} \cdot Y_{22}}{Y_{21}} - Y_{12} \right) \dot{U}_2 - \frac{Y_{11}}{Y_{21}} \cdot \dot{I}_2;$$

или

$$\begin{aligned} \dot{U}_1 &= \underline{A} \cdot \dot{U}_2 + \underline{B} \cdot \dot{I}_2; \\ \dot{I}_1 &= \underline{C} \cdot \dot{U}_2 + \underline{D} \cdot \dot{I}_2 \end{aligned} \quad (A)$$

обратное питание



Из уравнений (A) с изменением знаков \dot{I}_2 и \dot{I}_1

$$\dot{U}_2 = \underline{D} \cdot \dot{U}_1 + \underline{B} \cdot \dot{I}_1;$$

$$\dot{I}_1 = \underline{C} \cdot \dot{U}_2 + \underline{A} \cdot \dot{I}_1 \quad (B)$$

Для обратимых 4-х полюсников:

$$\underline{A} \underline{D} - \underline{B} \underline{C} = 1!$$

Для симметричных:

$$\underline{A} = \underline{D}!$$

4.3 Определение параметров проходных четырехполюсников

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = \underline{A} \cdot \dot{U}_2 + \underline{B} \cdot \dot{I}_2; \\ \dot{I}_1 = \underline{C} \cdot \dot{U}_2 + \underline{D} \cdot \dot{I}_2 \end{cases}$$

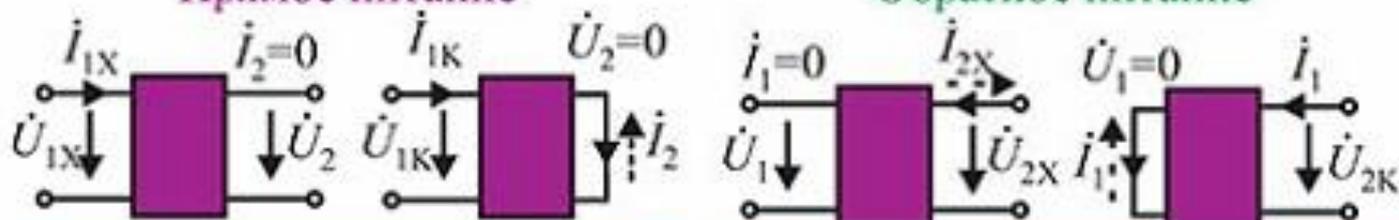
$$\begin{cases} \dot{U}_1 = \underline{Z}_{11} \cdot \dot{I}_1 + \underline{Z}_{12} \cdot \dot{I}_2 \\ \dot{I}_1 = \underline{Z}_{21} \cdot \dot{I}_1 + \underline{Z}_{22} \cdot \dot{I}_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{I}_1 = \underline{Y}_{11} \cdot \dot{U}_1 + \underline{Y}_{12} \cdot \dot{U}_2 \\ \dot{I}_2 = \underline{Y}_{21} \cdot \dot{U}_1 + \underline{Y}_{22} \cdot \dot{U}_2 \end{cases}$$

А. В соответствии с физическим смыслом из режимов х.х. и к.з.

Прямое питание

Обратное питание



$$\begin{aligned} \dot{U}_{1X} &= \underline{A} \cdot \dot{U}_2 & \dot{U}_{1K} &= \underline{B} \cdot \dot{I}_2 \\ \dot{I}_{1X} &= \underline{C} \cdot \dot{U}_2 & \dot{I}_{1K} &= \underline{D} \cdot \dot{I}_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{U}_{2X} &= \underline{D} \cdot \dot{U}_1 & \dot{U}_{2K} &= \underline{B} \cdot \dot{I}_1 \\ \dot{I}_{2X} &= \underline{C} \cdot \dot{U}_1 & \dot{I}_{2K} &= \underline{A} \cdot \dot{I}_1 \end{aligned}$$

Аналогично другие группы параметров :

$$\underline{Z}_{11}, \underline{Z}_{21}$$

$$\underline{H}_{11}, \underline{H}_{21} \quad \underline{H}_{12}, \underline{H}_{22}$$

$$\underline{Z}_{12}, \underline{Z}_{22}$$

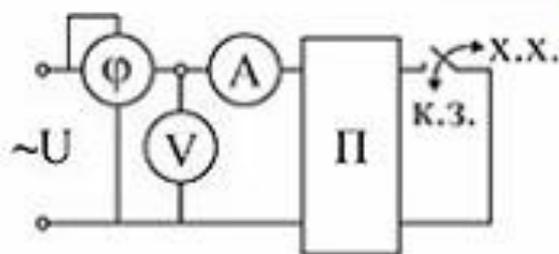
$$\underline{Y}_{11}, \underline{Y}_{21}$$

$$\underline{Y}_{12}, \underline{Y}_{22}$$

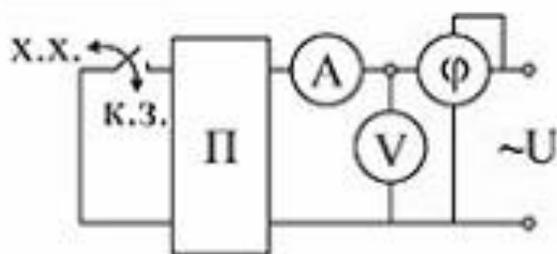
$$\underline{G}_{11}, \underline{G}_{21}$$

$$\underline{G}_{12}, \underline{G}_{22}$$

Б. Для обратимых четырехполюсников при измерениях только с одной стороны четырехполюсника



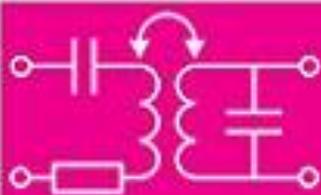
$$Z_{1X} = \frac{U_{1X}}{I} \cdot e^{j\varphi_{IX}} = \frac{A}{C}; \quad Z_{1K} = \frac{B}{D}$$



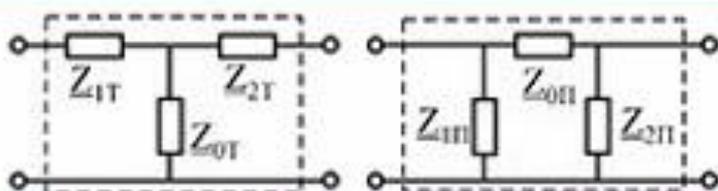
$$Z_{2X} = \frac{D}{C} \quad Z_{2K} = \frac{B}{A}$$

$$A = \sqrt{Z_{1X} / (Z_{2X} - Z_{2K})}; \quad B = A \cdot Z_{2K}; \quad C = A / Z_{1X}; \quad D = A \cdot Z_{2X} / Z_{1X}$$

4.4 Схемы замещения



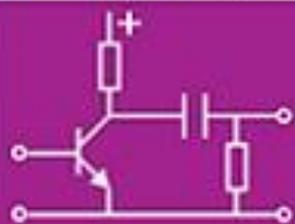
Пассивный линейный (обратимый)



3 параметра -
3 элемента

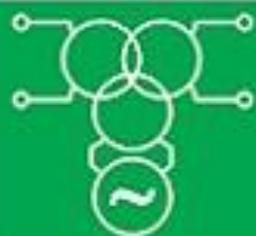
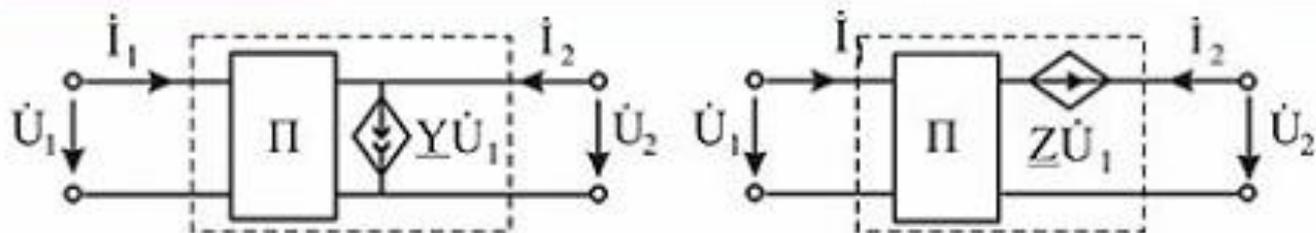
В симметричном : $Z_{1T} = Z_{2T}$, $Z_{1П} = Z_{2П}$

Симметричные уравновешенные схемы



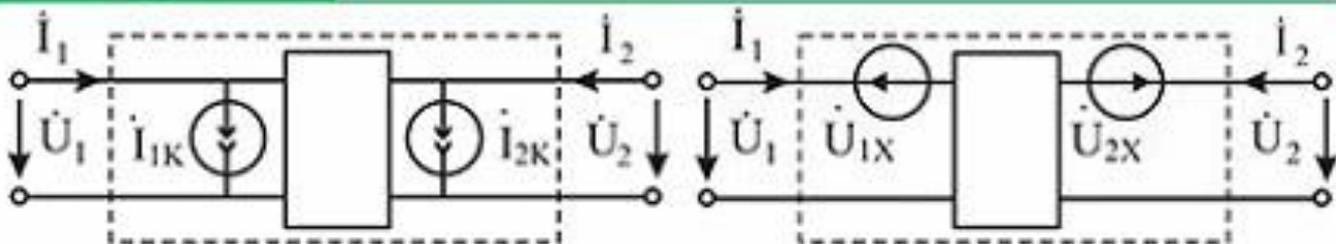
Активный неавтономный (необратимый)

$$\begin{cases} \dot{I}_1 = \underline{Y}_{11}\dot{U}_1 + \underline{Y}_{12}\dot{U}_2; \\ \dot{I}_2 = (\underline{Y}_{12} + \underline{Y})\dot{U}_1 + \underline{Y}_{22}\dot{U}_2. \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{U}_1 = \underline{Z}_{11}\dot{I}_1 + \underline{Z}_{12}\dot{I}_2 \\ \dot{U}_2 = (\underline{Z}_{12} + \underline{Z})\dot{I}_1 + \underline{Z}_{22}\dot{I}_2 \end{cases}$$

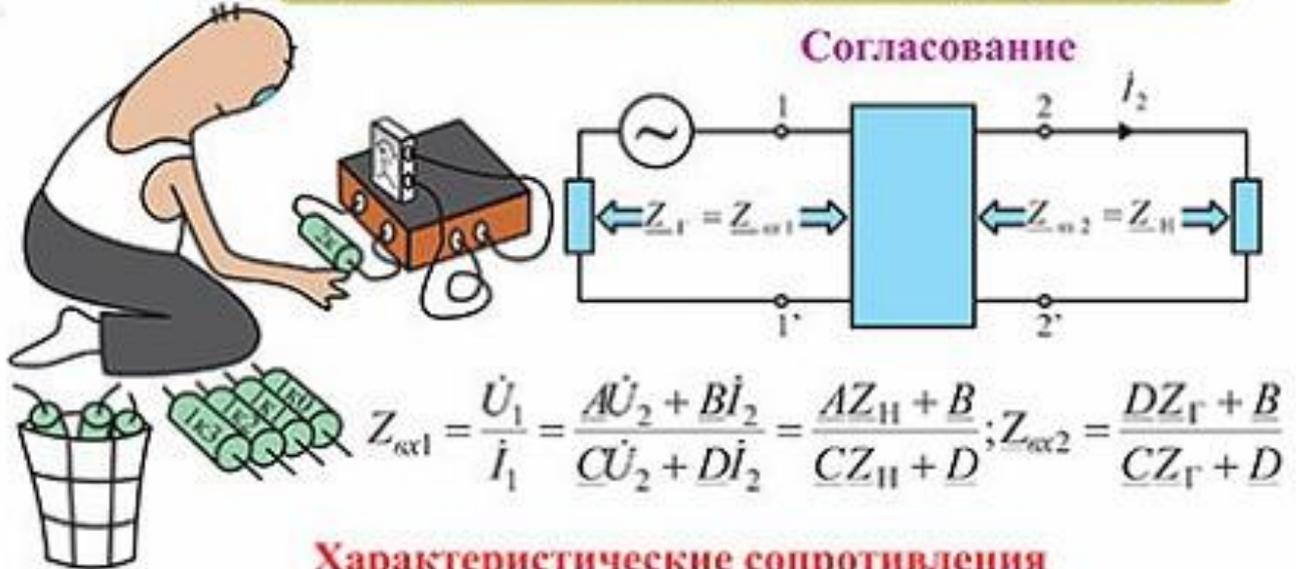


Активный автономный - до 6-ти элементов

$$\begin{cases} \dot{I}_1 = \underline{Y}_{11}\dot{U}_1 + \underline{Y}_{12}\dot{U}_2 + \dot{I}_{1K}; \\ \dot{I}_2 = \underline{Y}_{21}\dot{U}_1 + \underline{Y}_{22}\dot{U}_2 + \dot{I}_{2K}. \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{I}_1 = \underline{Y}_{11}\dot{U}_1 + \underline{Y}_{12}\dot{U}_2 + \dot{I}_{1K}; \\ \dot{I}_2 = \underline{Y}_{21}\dot{U}_1 + \underline{Y}_{22}\dot{U}_2 + \dot{I}_{2K}. \end{cases}$$



4.5 Характеристические (вторичные) параметры



Характеристические сопротивления

При полном согласовании $Z_{\Gamma} = Z_{\text{вх}1} = Z_{C1}$ и $Z_{\text{н}} = Z_{\text{вх}2} = Z_{C2}$

$$Z_{C1} = \frac{AZ_{C2} + B}{CZ_{C2} + D}$$

$$Z_{C1} = \frac{DZ_{C1} + B}{CZ_{C1} + A}$$

$$Z_{C1} = \sqrt{\frac{AB}{CD}} = \sqrt{Z_{1X} Z_{1K}}$$

$$Z_{C2} = \sqrt{\frac{DB}{CA}} = \sqrt{Z_{2X} Z_{2K}}$$

В симметричном

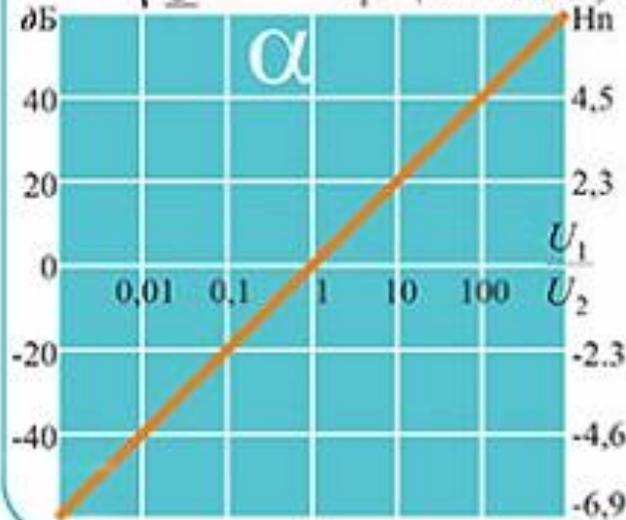
$$\frac{A}{C} = \frac{D}{B}$$

$$Z_{C1,2} = Z_C = \sqrt{\frac{B}{C}}$$

$$Z_{\text{вх}} = Z_{\text{н}} = Z_C$$

Мера передачи симметричного четырехполюсника

$$\dot{U}_2 = \sqrt{\frac{B}{C}} \cdot \dot{I}_2 \Rightarrow \left. \begin{aligned} \dot{U}_1 &= (A + \sqrt{BC}) \cdot \dot{U}_2 = e^{\alpha} \cdot \dot{U}_2 \\ \dot{I}_1 &= (A + \sqrt{BC}) \cdot \dot{I}_2 = e^{\alpha} \cdot \dot{I}_2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2} = \frac{\dot{I}_1}{\dot{I}_2} = e^{\alpha} = e^{\alpha + j\beta}$$



Коэффициент фазы

$$\beta = \Psi_{U1} - \Psi_{U2} = \Psi_{I1} - \Psi_{I2}$$

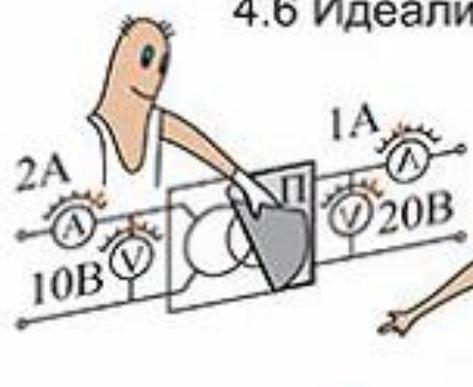
Коэффициент затухания

$$\alpha[\text{Hn}] = \ln \frac{U_1}{U_2} = \ln \frac{I_1}{I_2} = \frac{1}{2} \ln \frac{S_1}{S_2}$$

$$\alpha[\text{Б}] = \lg \frac{S_1}{S_2} = 2 \lg \frac{U_1}{U_2} = 2 \lg \frac{I_1}{I_2}$$

$$1 \text{ dB} = 0,1 \text{ Б} = 0,115 \text{ Hn}$$

4.6 Идеализированные четырехполюсники

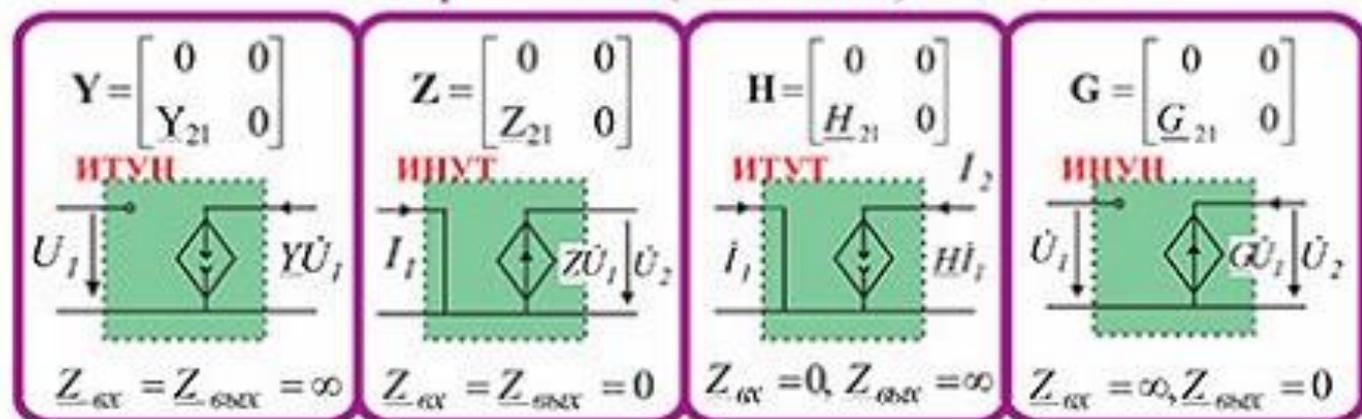


$$I = Y \cdot U, \quad U = Z \cdot I,$$

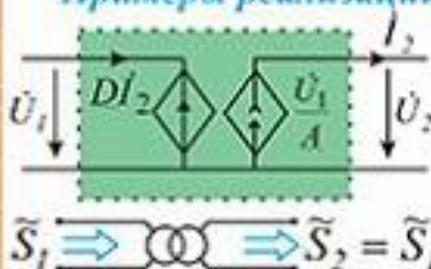
$$\begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix} = \mathbf{H} \begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{U}_2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{U}_2 \end{bmatrix} = \mathbf{G} \begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{I}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{A} & \underline{B} \\ \underline{C} & \underline{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U}_2 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix}, \quad \dot{U}_2 = Z_H \dot{I}_2$$

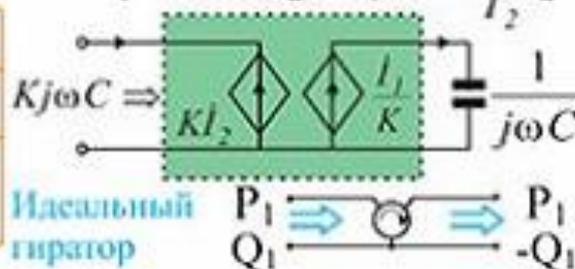
Управляемые (зависимые) источники



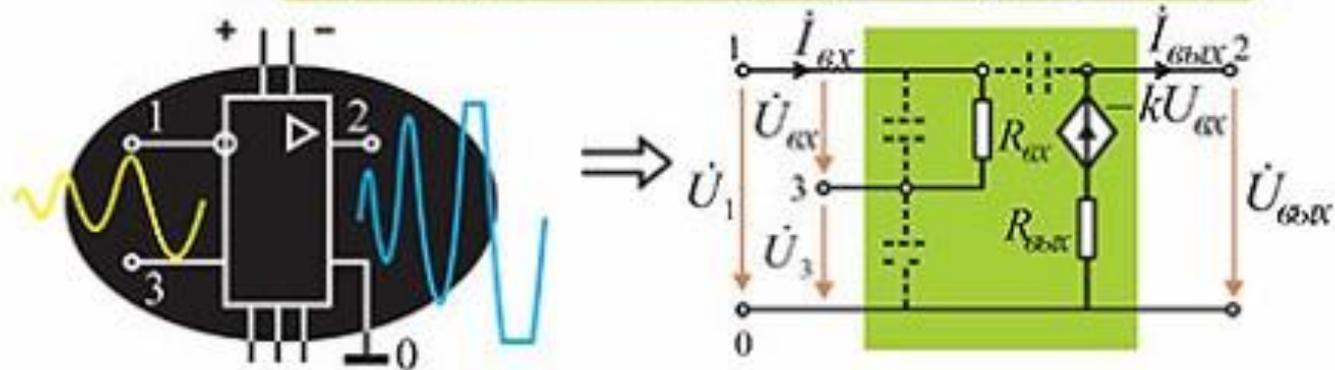
Конвертор сопротивлений: $B = C = 0, \dot{U}_1 = \underline{A} \cdot \dot{U}_2, \dot{I}_1 = \underline{D} \cdot \dot{I}_2$

Варианты	\dot{U}_1 / \dot{U}_2	\dot{I}_1 / \dot{I}_2	$Z_{\text{вх}}$	\tilde{S}_1 / S_2	Примеры реализации 
$\underline{D} / \underline{A} = \pm K_1$	\underline{A}	\underline{D}	$\pm \frac{Z_H}{K_1}$	$\underline{A} \underline{D}$	
$\underline{A} = 1, \underline{D} = \pm K_1$	1	$\pm 1 / K_1$		$\pm K_1$	
$\underline{D} = 1, \underline{A} = \pm K_1$	$\pm 1 / K_1$	1		$\pm K_1$	
$\underline{A} = 1 / \underline{D} = \pm K_T$	$\pm K_T$	$\pm 1 / K_T$	$K_T^2 Z_H$	1	

Инвертор сопротивлений: $\underline{A} = \underline{D} = 0, \dot{U}_1 = \underline{B} \cdot \dot{I}_2, \dot{I}_1 = \underline{C} \cdot \dot{I}_2$

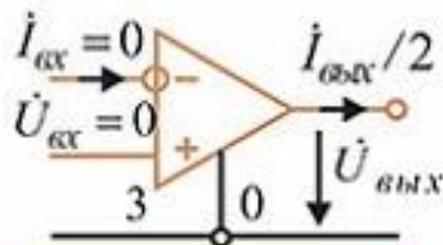
Варианты	$Z_{\text{вх}}$	P_1 / P_2	Q_1 / Q_2	Идеальный гиратор 
$\underline{B} / \underline{C} = \pm K_2$	$\pm K_2 Z_H$	$\pm \underline{B} \underline{C}$	$\mp \underline{B} \underline{C}$	
$\underline{C} = \pm 1 / \underline{B} = \pm G$	$\frac{1}{G^2 Z_H}$	1	-1	

4.7 Характеристические (вторичные) параметры

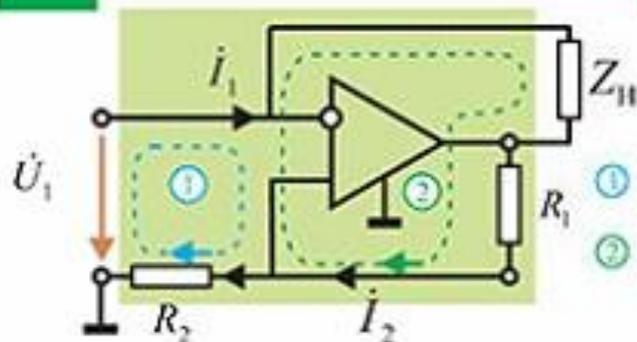
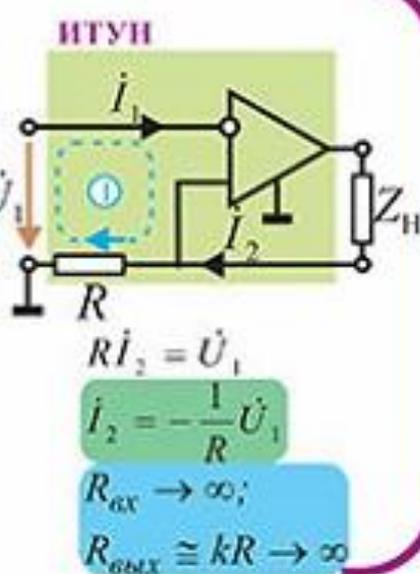
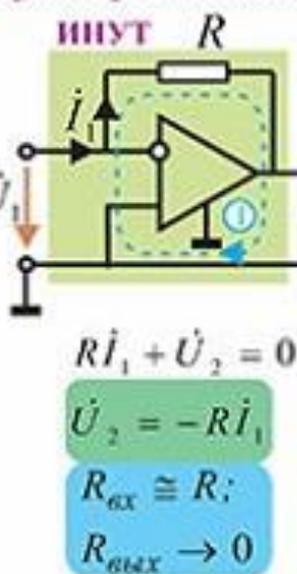
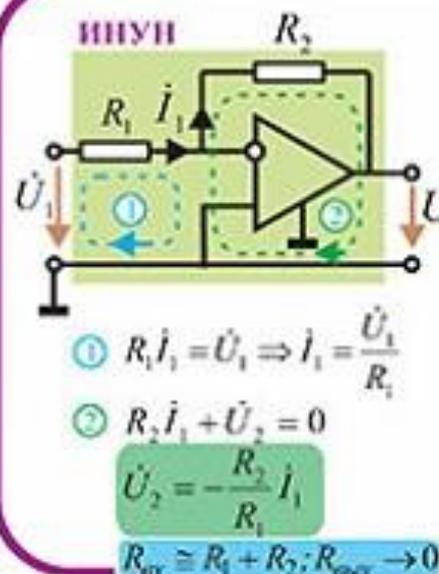


$$\begin{aligned} \dot{U}_{вх} &= R_{вх} \dot{I}_{вх} \\ \dot{U}_{ввх} &= -k\dot{U}_{вх} - R_{ввх} \dot{I}_{ввх} \\ k > 10^5, R_{вх}/R_{ввх} > 1000 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_{вх} &\rightarrow \infty \\ R_{ввх} &\rightarrow 0 \\ k &\rightarrow \infty \end{aligned}$$



Примеры анализа

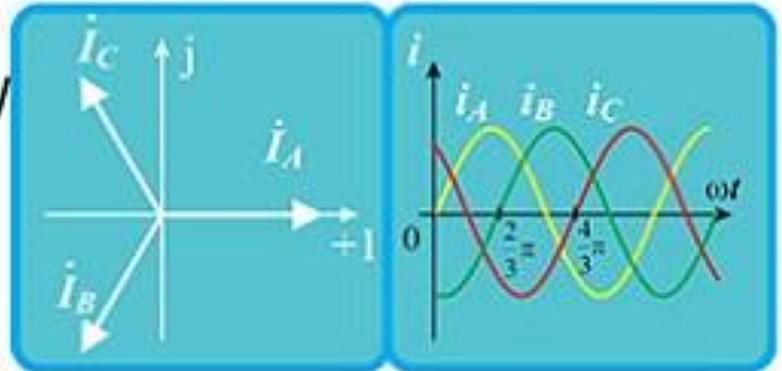


Конвертор отрицательного сопротивления

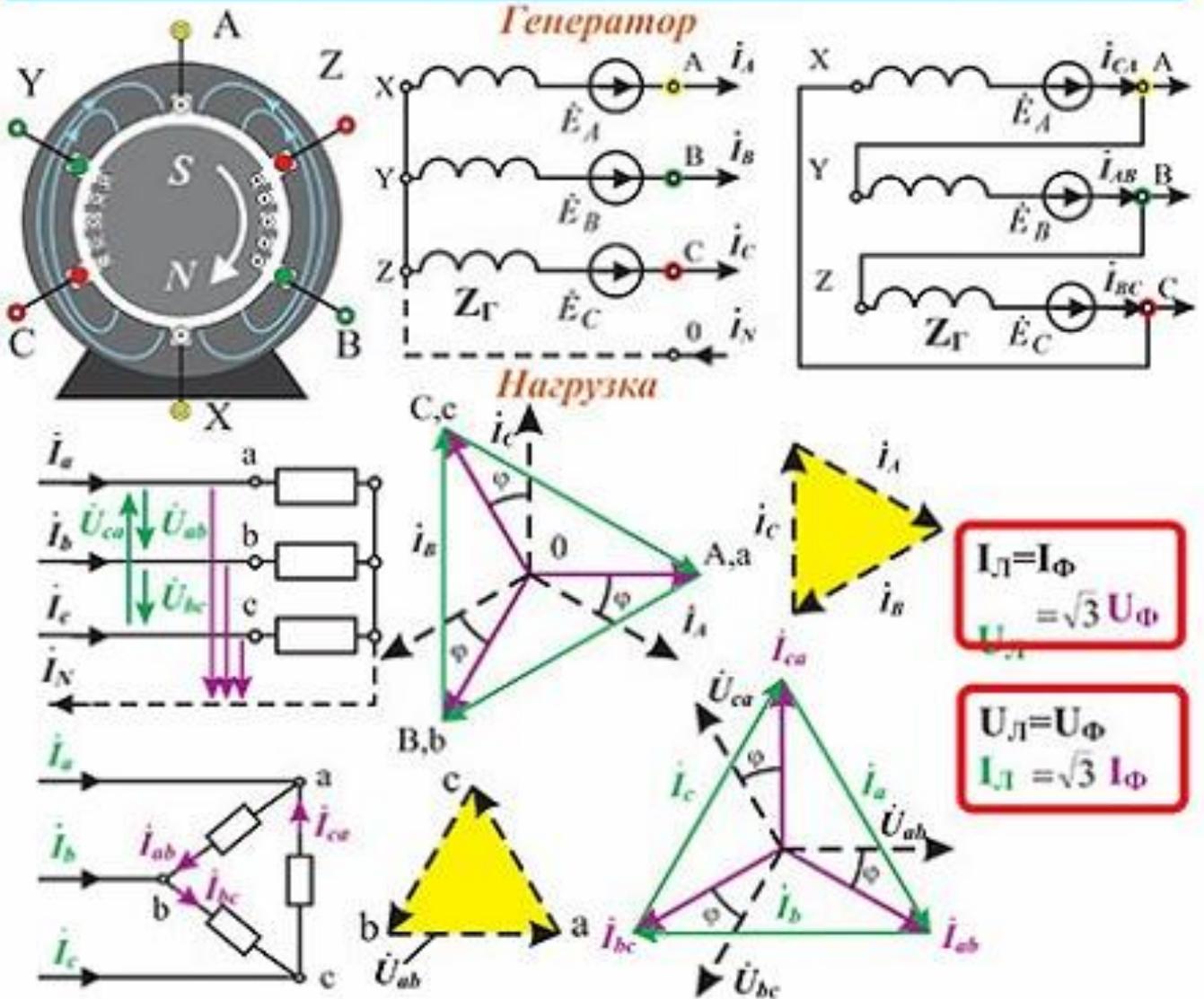
- ① $\dot{U}_1 = R_2 \dot{I}_2$
- ② $Z_H \dot{I}_2 + R_1 \dot{I}_2 = 0 \Rightarrow Z_{вх} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} = -\frac{R_2}{R_1} Z_H$

5. Трёхфазные цепи

5.1 Основные понятия и схемы соединения



$$i_A = I_m \sin \omega t, \quad i_B = I_m \sin(\omega t - 120^\circ), \quad i_C = I_m \sin(\omega t + 120^\circ)$$



5 Трёхфазные цепи

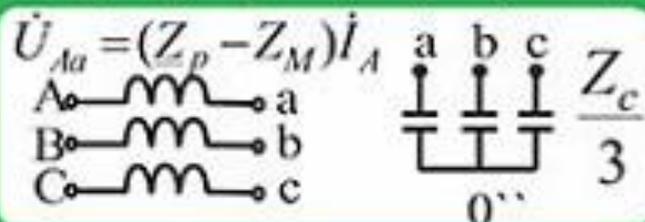
5.2 Расчет симметричных режимов



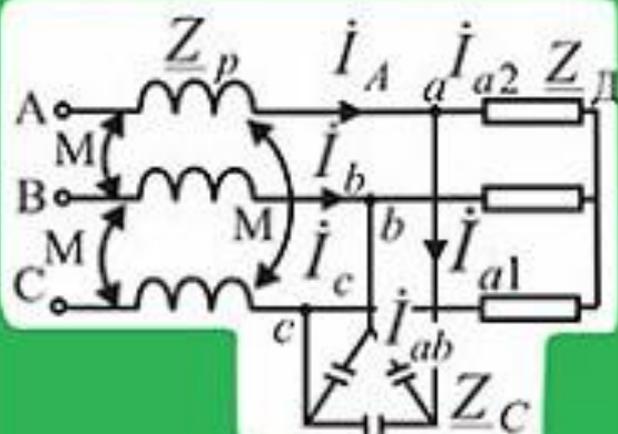
2 Эквивалентные преобразования

$$\dot{U}_{Aa} = Z_p \dot{I}_A + Z_M \dot{I}_B + Z_M \dot{I}_C$$

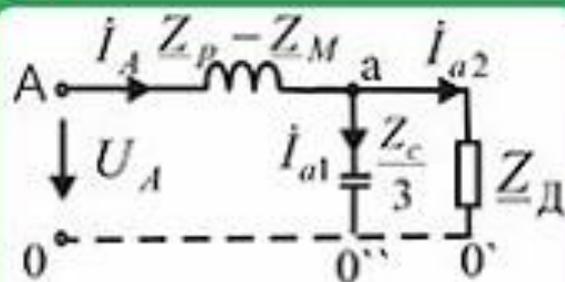
$$\dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C = 0 \Rightarrow \dot{I}_B + \dot{I}_C = -\dot{I}_A$$



1 Составление расчетной схемы



3 Выделение одной фазы



5 Расчет мощностей

$$S = 3U_\phi I_\phi$$

$$\Delta \Rightarrow U_\phi = U_\lambda, I_\phi = I_\lambda / \sqrt{3}$$

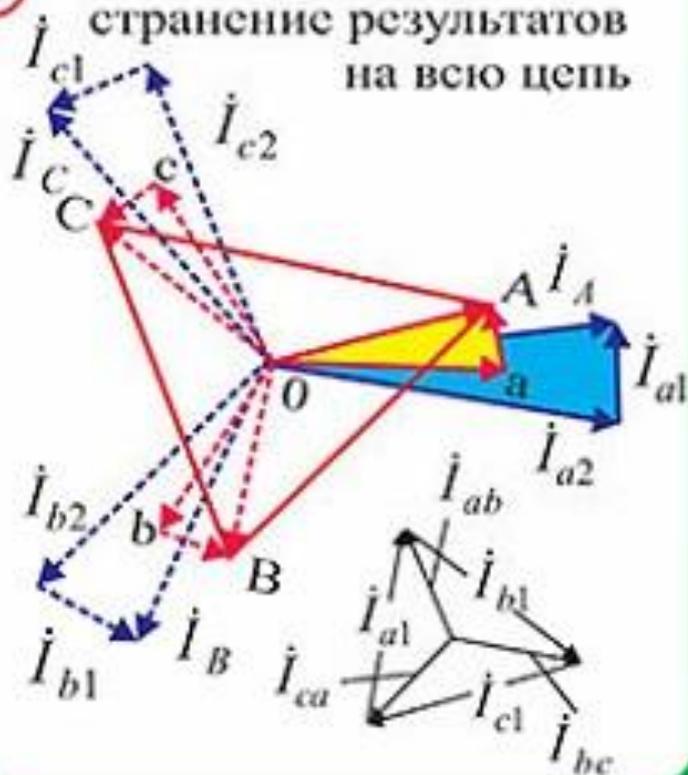
$$\lambda \Rightarrow U_\phi = U_\lambda / \sqrt{3}$$

$$S = \sqrt{3} U_\lambda I_\lambda$$

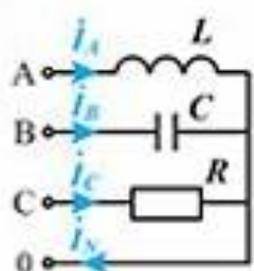
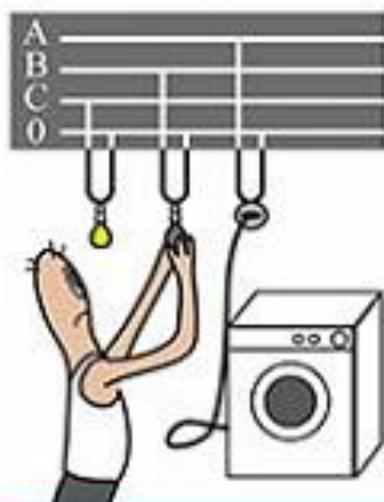
$$P = 3U_\phi I_\phi \cos \varphi = \sqrt{3} U_\lambda I_\lambda \cos \varphi$$

$$Q = 3U_\phi I_\phi \sin \varphi = \sqrt{3} U_\lambda I_\lambda \sin \varphi$$

4 Расчет фазы и распространение результатов на всю цепь



5.3 Расчет несимметричных режимов

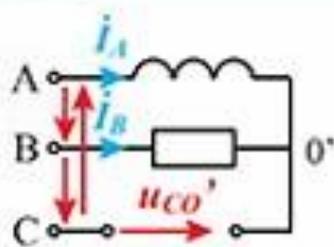
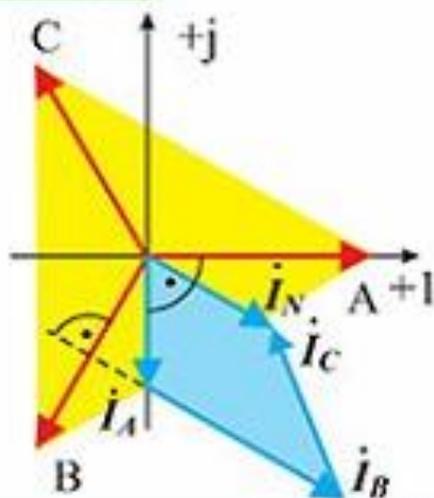


$$i_A = \frac{\dot{U}_A}{jX_L}$$

$$i_B = \frac{\dot{U}_B}{-jX_C}$$

$$i_C = \frac{\dot{U}_C}{R}$$

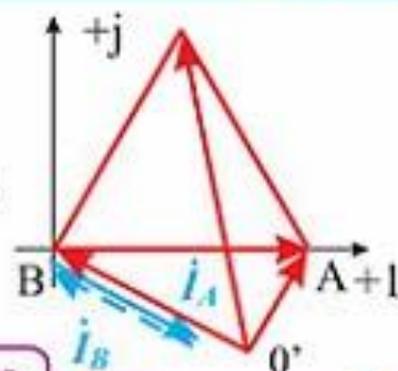
$$i_N = i_A + i_B + i_C$$



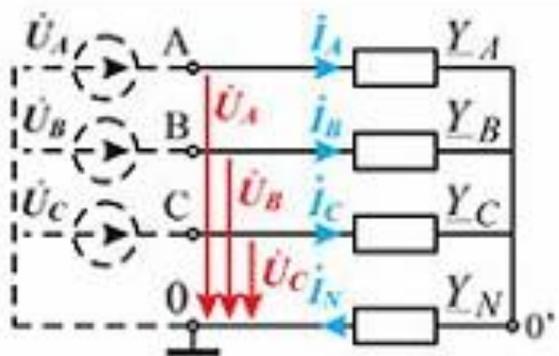
$$i_A = -i_B = \frac{\dot{U}_{AB}}{R + jX_L};$$

$$\dot{U}_{AO'} = jX_L i_A, \quad \dot{U}_{BO'} = R i_B,$$

$$\dot{U}_{CO'} = \dot{U}_{BO'} - \dot{U}_{BC}.$$



Применение метода узловых потенциалов



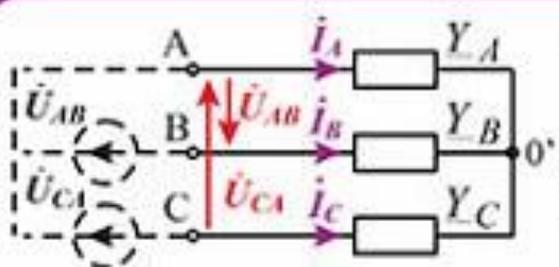
$$\dot{U}_{00} = \frac{Y_A \dot{U}_A + Y_B \dot{U}_B + Y_C \dot{U}_C}{Y_A + Y_B + Y_C + Y_N};$$

$$\dot{U}_{AO'} = \dot{U}_A - \dot{U}_{00}; \quad i_A = Y_A \dot{U}_{AO'};$$

$$\dot{U}_{BO'} = \dot{U}_B - \dot{U}_{00}; \quad i_B = Y_B \dot{U}_{BO'};$$

$$\dot{U}_{CO'} = \dot{U}_C - \dot{U}_{00}; \quad i_C = Y_C \dot{U}_{CO'};$$

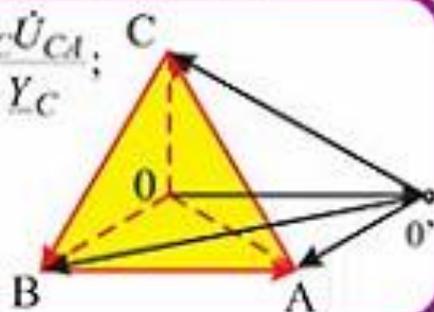
$$i_N = Y_N \dot{U}_{00}.$$



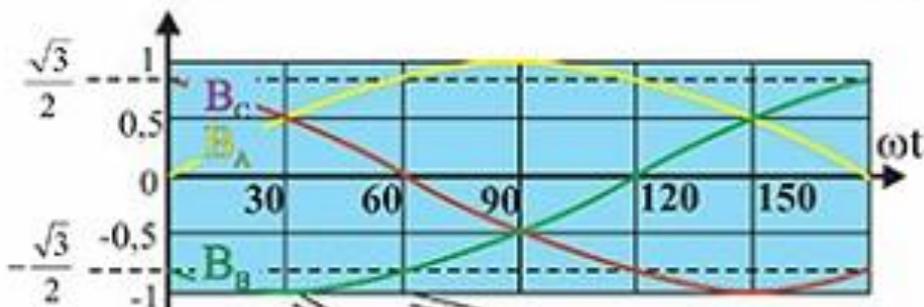
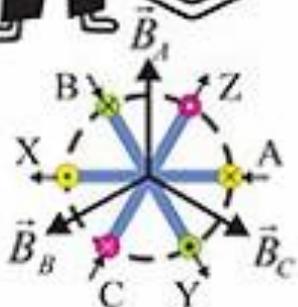
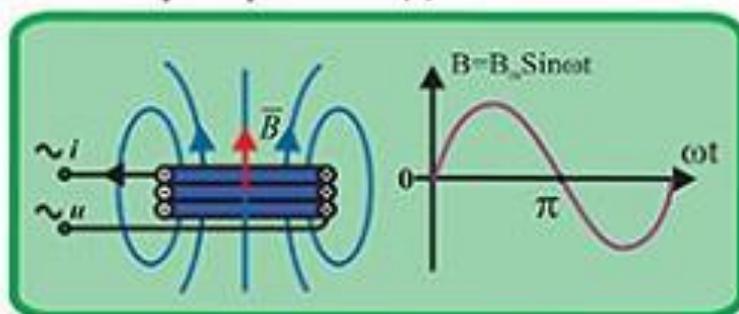
$$\dot{U}_{00} = \frac{Y_A \dot{U}_{AB} - Y_C \dot{U}_{CA}}{Y_A + Y_B + Y_C};$$

$$\dot{U}_{BO'} = \dot{U}_{AO'} - \dot{U}_{AB};$$

$$\dot{U}_{CO'} = \dot{U}_{AO'} + \dot{U}_{CA}.$$



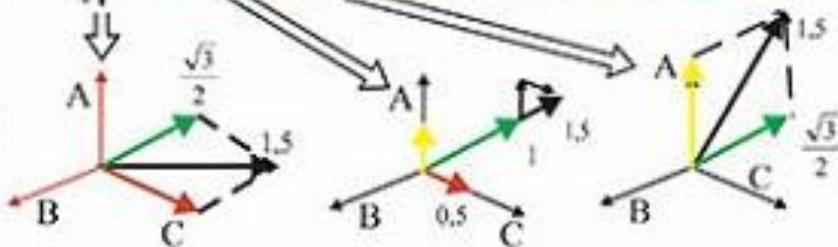
5.4 Вращающееся магнитное поле. Принцип действия трехфазных двигателей



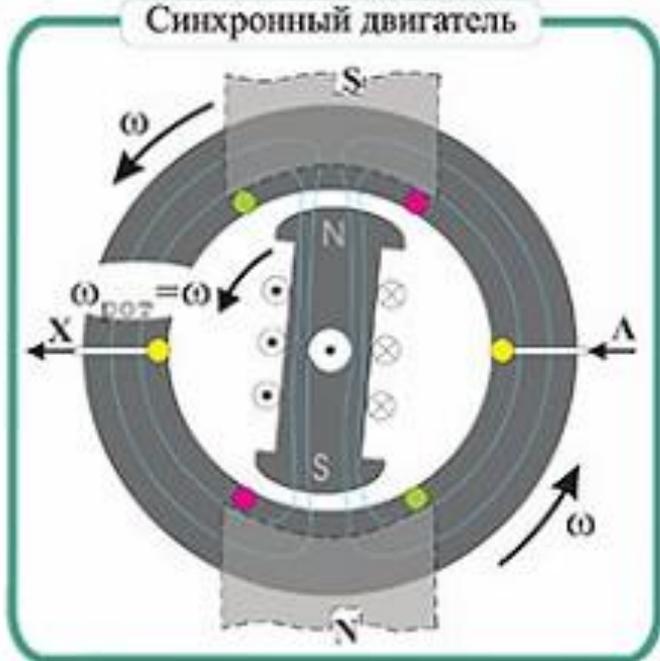
$$\vec{B} = \vec{B}_A + \vec{B}_B + \vec{B}_C$$

$$N = \frac{60f}{p} = \frac{3000}{p} \text{ об/мин}$$

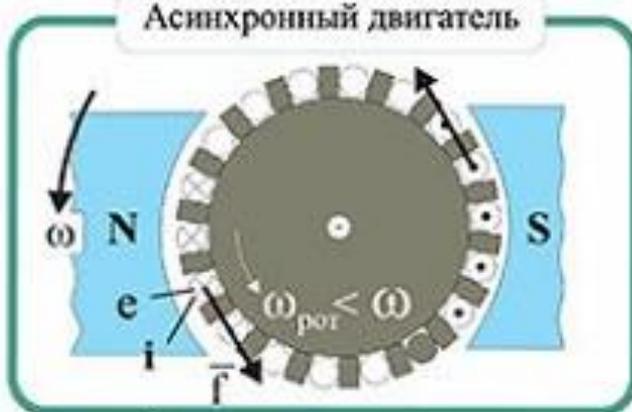
p-число пар полюсов



Синхронный двигатель

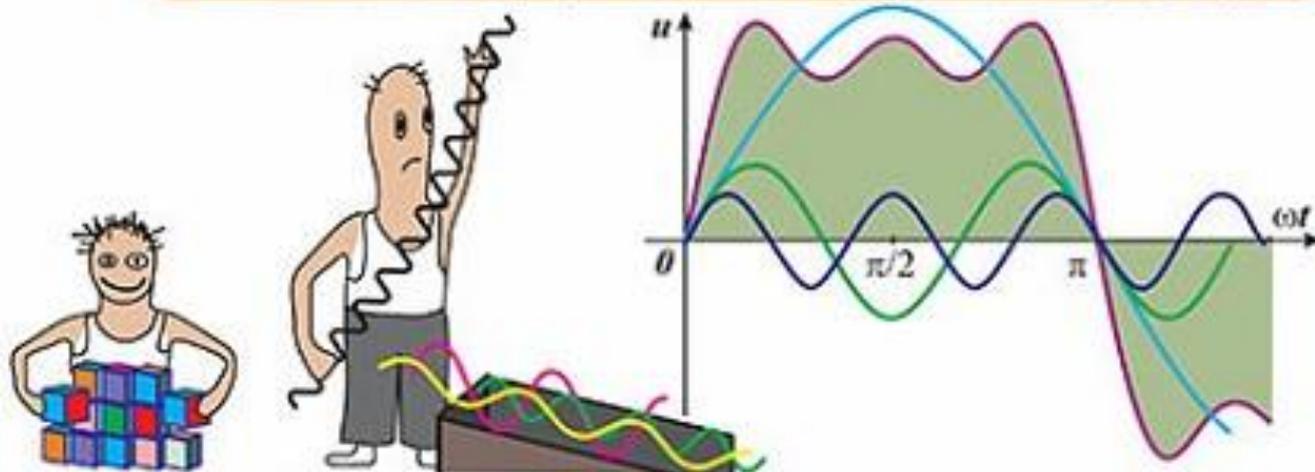


Асинхронный двигатель



6. Периодические несинусоидальные токи

6.1 Разложение периодической функции в ряд Фурье



$$f(\omega t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_{km} \sin(k\omega t + \Psi_k) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} B_{km} \sin k\omega t + \sum_{k=1}^{\infty} C_{km} \cos k\omega t$$

$$A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(\omega t) d\omega t;$$

$$B_{km} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(\omega t) \sin k\omega t d\omega t;$$

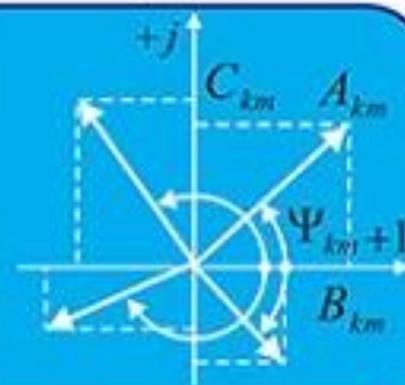
$$C_{km} = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{+\pi} f(\omega t) \cos k\omega t d\omega t.$$

$$A_{km} = \sqrt{B_{km}^2 + C_{km}^2}$$

$$\Psi_k = \arctg \frac{C_{km}}{B_{km}}$$

$$B_{km} = A_{km} \cos \Psi_{km}$$

$$C_{km} = A_{km} \sin \Psi_{km}$$

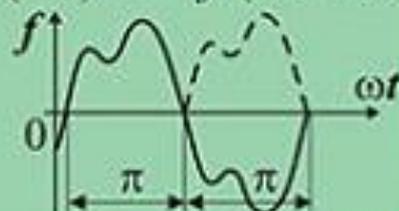


Симметричная форма ряда

$$f(\omega t) = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (B_{km} \sin k\omega t + C_{km} \cos k\omega t). \quad \text{При } k=0, \quad A_0 = \frac{C_{0m}}{2}$$

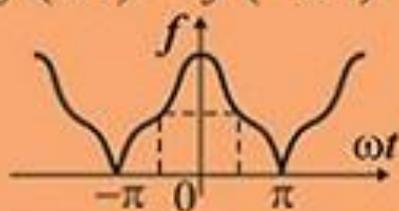
Разложение симметричных функций

$$f(\omega t) = -f(\omega t + \pi)$$



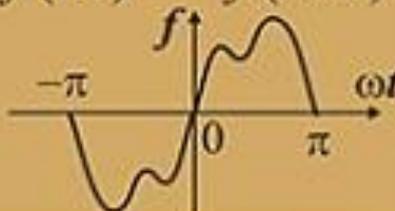
$$f(\omega t) = \sum_{k=1,3,5,\dots} A_{km} \sin(k\omega t + \Psi_k)$$

$$f(\omega t) = f(-\omega t)$$



$$f(\omega t) = A_0 + \sum_{k=1,2,3,\dots} C_{km} \cos k\omega t$$

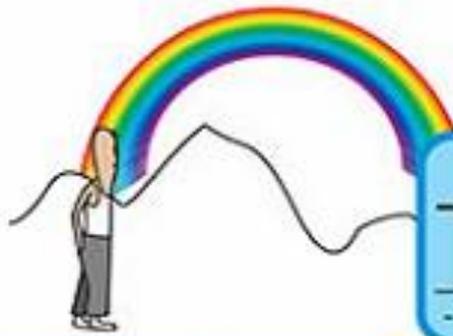
$$f(\omega t) = -f(-\omega t)$$



$$f(\omega t) = \sum_{k=1,2,3,\dots} B_{km} \sin k\omega t$$

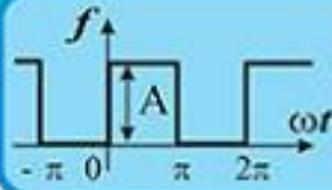
6. Периодические несинусоидальные токи

6.2 Дискретные спектры сигналов

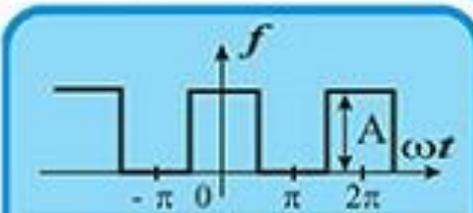


$A_{km}(k\omega)$ - амплитудный спектр

$\Psi_k(k\omega)$ - частотный спектр

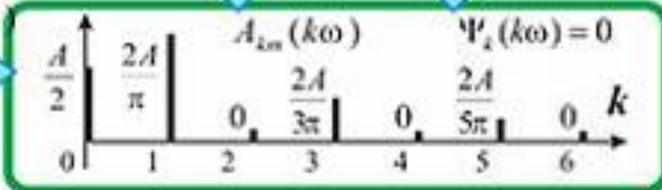


$$f(\omega t) = \frac{A}{2} + \frac{2A}{\pi} (\sin \omega t + \frac{1}{3} \sin 3\omega t + \frac{1}{5} \sin 5\omega t + \dots)$$

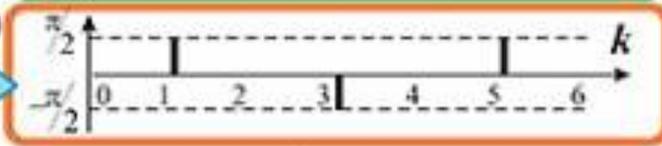


$$f(\omega t) = \frac{A}{2} + \frac{2A}{\pi} (\cos \omega t - \frac{1}{3} \cos 3\omega t + \frac{1}{5} \cos 5\omega t + \dots)$$

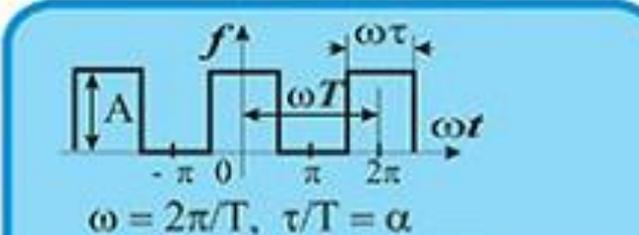
$A_{km}(k\omega)$



$\Psi_k(k\omega)$



Симметричные спектры



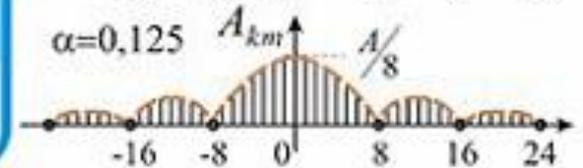
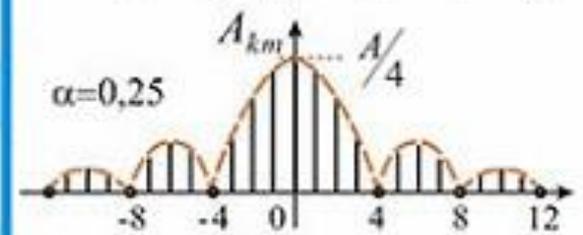
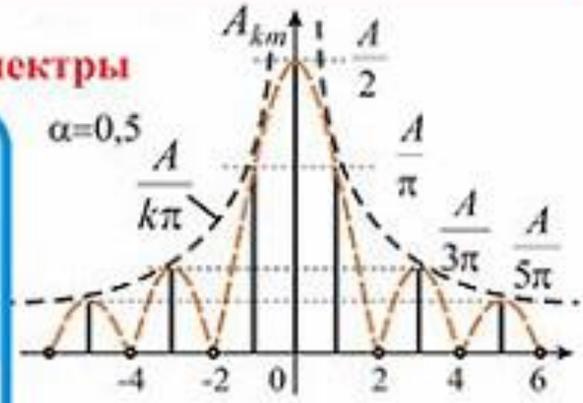
$$f(\omega t) = \alpha A + \frac{2A}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k\alpha\pi}{k} \cos k\omega t$$

Симметричная форма ряда

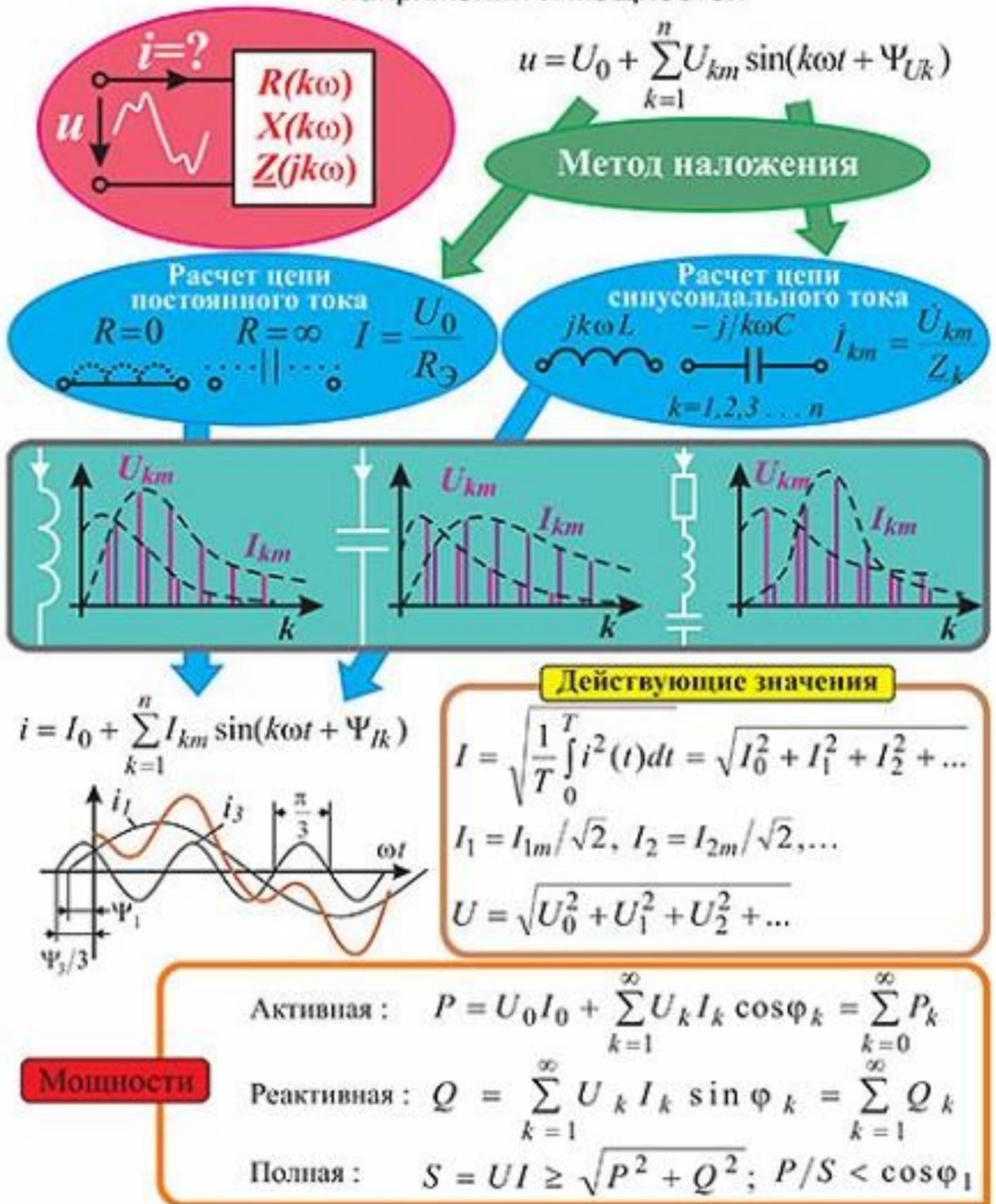
$$f(\omega t) = \frac{A}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\sin k\alpha\pi}{k} \cos k\omega t$$

При $k=0$

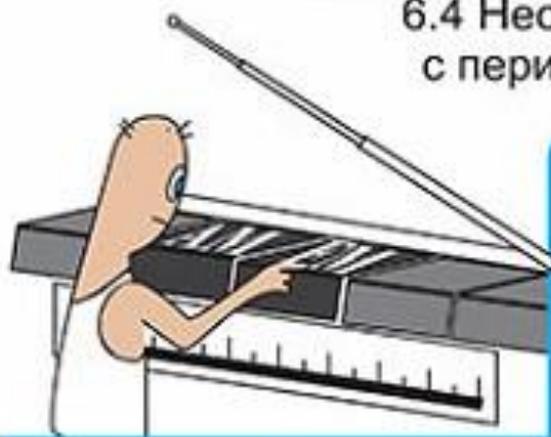
$$A_0 = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{A \sin k\alpha\pi}{\pi k} = \alpha A$$



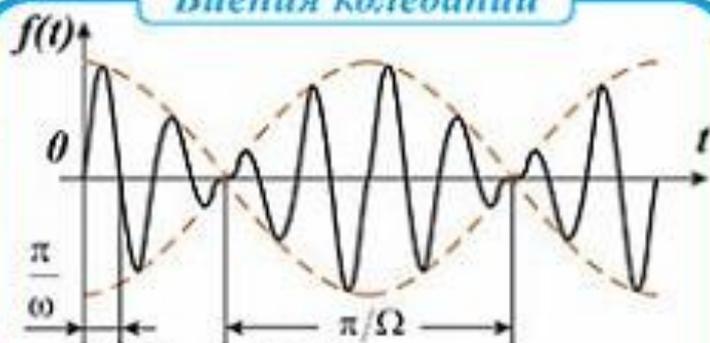
6.3 Применение рядов Фурье к расчету токов, напряжений и мощностей



6.4 Несинусотдальные кривые с периодической огибающей



Биеция колебаний

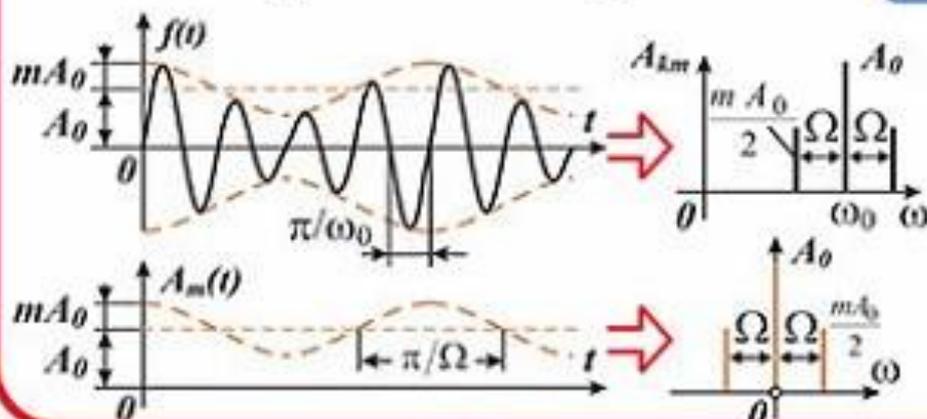


$$f(t) = A_m \sin \omega_1 t + A_m \sin \omega_2 t = 2A_m \cos \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t \sin \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t = 2A_m \cos \Omega t \sin \Omega t$$

Амплитудная модуляция

$$f(t) = A_m \sin \omega_0 t = A_0 (1 + m \cos \Omega t) \cdot \sin \omega_0 t = A_0 \sin \omega_0 t + \frac{mA_0}{2} \sin(\omega_0 - \Omega)t + \frac{mA_0}{2} \sin(\omega_0 + \Omega)t$$

ω_0 - несущая частота,
 Ω - модулирующая,
 m - коэф. модуляции

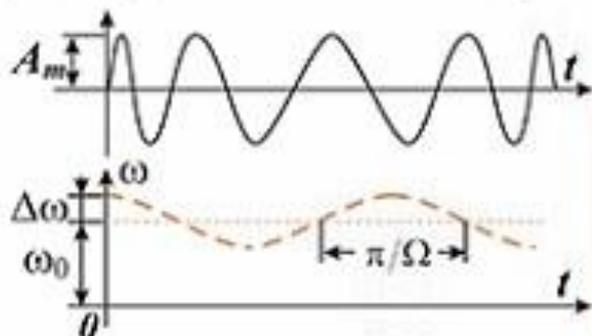


$$A_m(t) = A_0(1 + m \cos \Omega t) = A_0 + \frac{mA_0}{2} \cos(-\Omega t) + \frac{mA_0}{2} \cos(\Omega t)$$

Частотная модуляция

$f(t) = A_m \sin \alpha(t)$. Если $\omega = \omega_0 + \Delta\omega \cos \Omega t$, то $\alpha(t) = \int \omega dt = \omega_0 t + \frac{\Delta\omega}{\Omega} \sin \Omega t$,

$$f(t) = A_m \sin(\omega_0 t + \frac{\Delta\omega}{\Omega} \sin \Omega t)$$

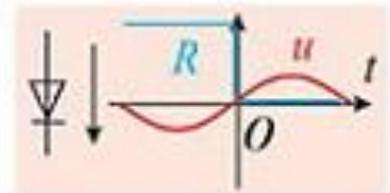
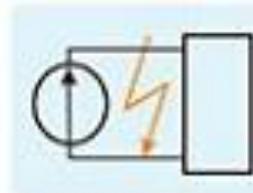
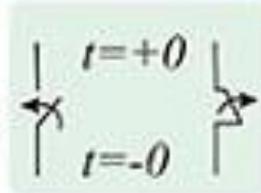


При $\Delta\omega/\Omega \ll 1$: $f(t) \cong A_m \sin \omega_0 t + \frac{\Delta\omega}{\Omega} \frac{A_m}{2} \sin(\omega_0 - \Omega)t + \frac{\Delta\omega}{\Omega} \frac{A_m}{2} \sin(\omega_0 + \Omega)t$

7. Переходные процессы в линейных цепях

7.1 Общие сведения

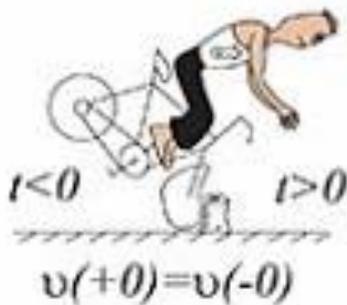
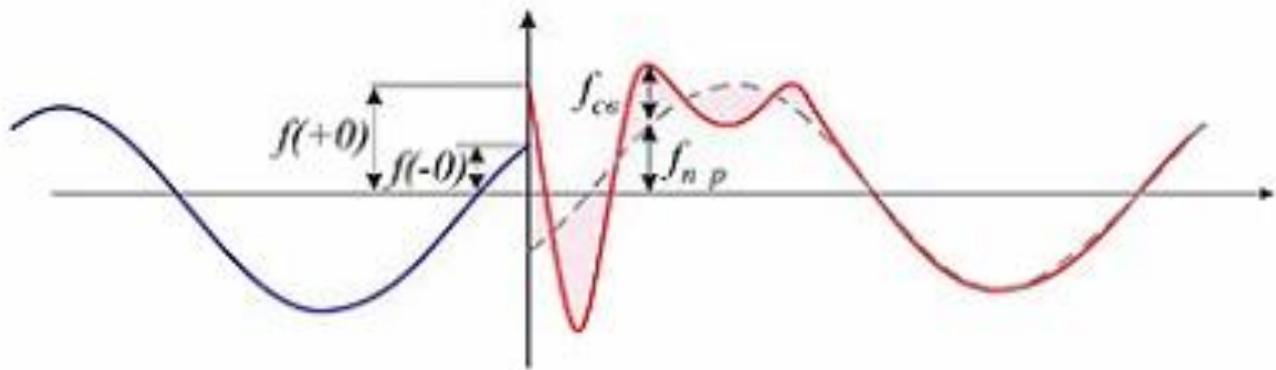
Коммутация
(при $t=0, \Delta t=0$)



Режим
до коммутации
 $t < 0$

Переходный
процесс
 $f(t) \Rightarrow (u, i, q \dots)$

Новый
установившийся
режим ($t \rightarrow \infty$)



Законы коммутации:

$$L \left\{ \begin{array}{l} W_M = \frac{\psi i}{2} = \frac{Li^2}{2} \\ i_L(+0) = i_L(-0) \end{array} \right. \quad C \left\{ \begin{array}{l} W_C = \frac{qU}{2} = \frac{Cu^2}{2} \\ U_C(+0) = U_C(-0) \end{array} \right.$$

Диф. уравнение цепи: $a_n \frac{d^n i}{dt^n} + \dots + a_2 \frac{d^2 i}{dt^2} + a_1 \frac{di}{dt} + a_0 i = f(t)$

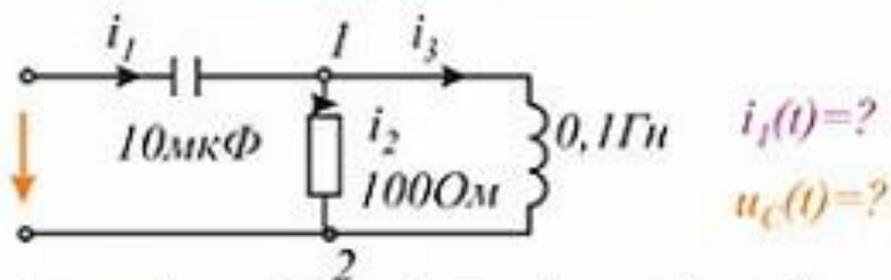
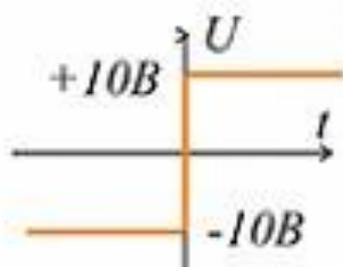
Его полный интеграл: $i = i_{np} + i_{cs} = i_{np} + A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t} + \dots$

где i_{np} - из расчета цепи в новом установившемся режиме;
 i_{cs} - общее решение однородного дифференциального уравнения;

p_1, p_2, \dots - корни характеристического уравнения;

A_1, A_2, \dots - из начальных условий.

7.2 Классический метод анализа



$$i_1(t) = ?$$

$$u_C(t) = ?$$

Расчет цепи
при $t < 0$
при $t = +0$
при $t \rightarrow \infty$

t	i_1, A	i_2, A	i_3, A	u_C, B	u_L, B
-0	-0	0	0	-10	0
+0	0,2	0,2	0	-10	20
∞	0	0	0	10	0

Составление и
решение харак-
теристического
уравнения

Один из способов: $Y_{12}(p) = 0$

$$pC + \frac{1}{R} + \frac{1}{pL} = 0 \Rightarrow p^2 + \frac{1}{RC}p + \frac{1}{LC} = 0$$

$$p^2 + 10^3p + 10^6 = 0 \Rightarrow p_{1,2} = -500 \pm j867$$

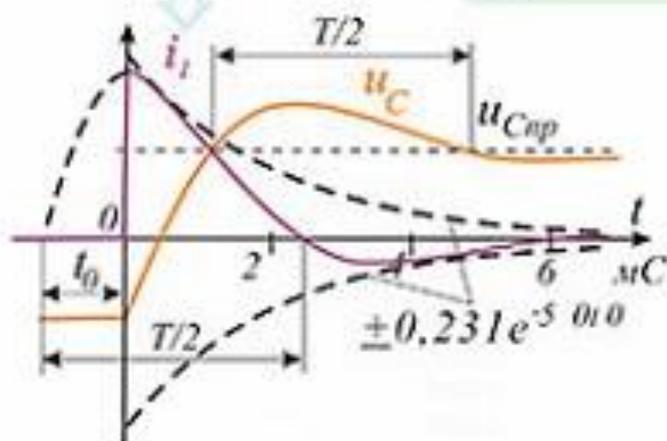
Запись общего
решения в
зависимости от
вида корней

$$u_C = u_{Cn} + Ae^{-\delta t} \sin(\omega t + \psi)$$

$$i_1 = C \frac{du_C}{dt} = CAe^{-\delta t} [-\delta \sin(\omega t + \psi) + \omega \cos(\omega t + \psi)]$$

Определение
постоянных
интегрирования

При $t = +0$: $u_C(+0) = -10 = 10 + A \sin \psi$
 $i_1(+0) = 0,2 = 10^{-5} A (-500 \sin \psi + 866 \cos \psi)$
 $\psi = -60^\circ \quad A = 23,1$



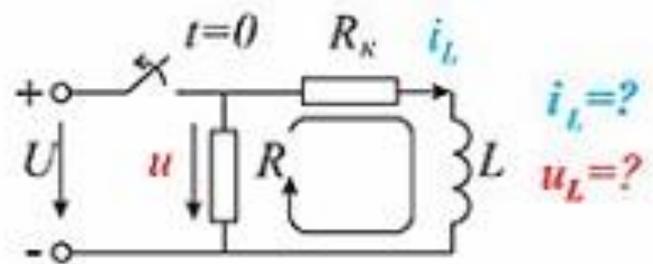
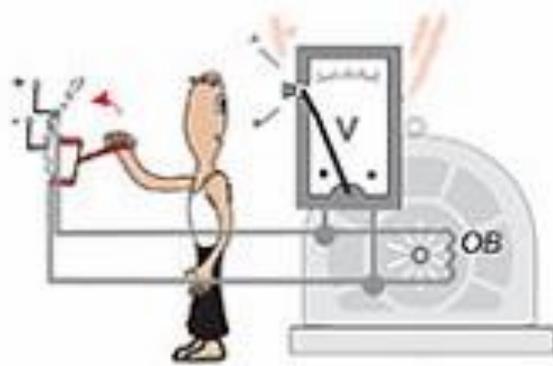
$$u_C = 10 + 23,1 e^{-500t} \sin(867t - 60^\circ)$$

$$i_1 = 0,231 e^{-500t} \sin(867t + 60^\circ)$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 7,25 \text{ мс}$$

$$t_0 = \frac{\psi}{\omega} = 1,2 \text{ мс}$$

7.3 Переходный процесс при отключении катушки

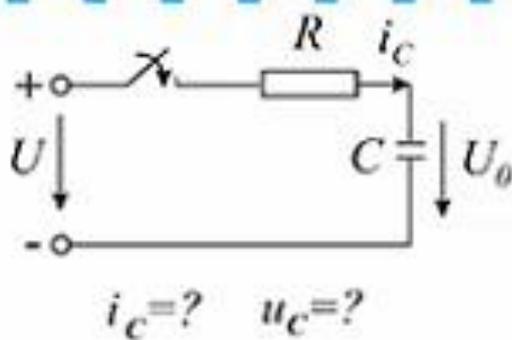
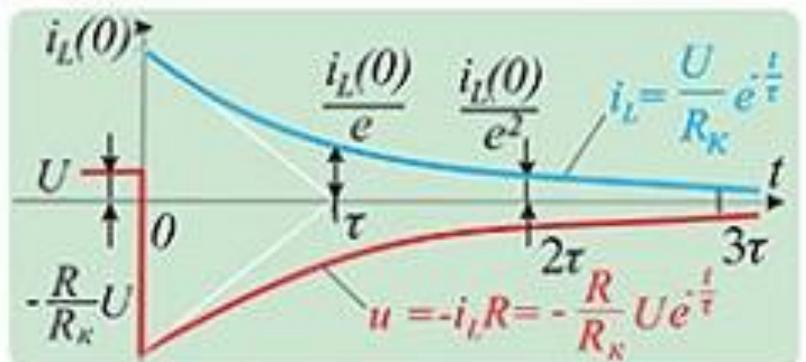


$$i_L(+0) = i_L(-0) = \frac{U}{R_K}; \quad i_{L, \text{ст}} = 0$$

$$(R + R_K)i_L + L \frac{di_L}{dt} = 0$$

$$R + Lp = 0 \Rightarrow p = -\frac{R}{L}; \quad \tau = \frac{L}{R}$$

$$i = i_{\text{н.р.}} + i_{\text{св.}} = Ae^{p \cdot t} \quad \text{При } t = +0: \frac{U}{R_K} = Ae^{0 \cdot t} \Rightarrow A = \frac{U}{R_K}$$

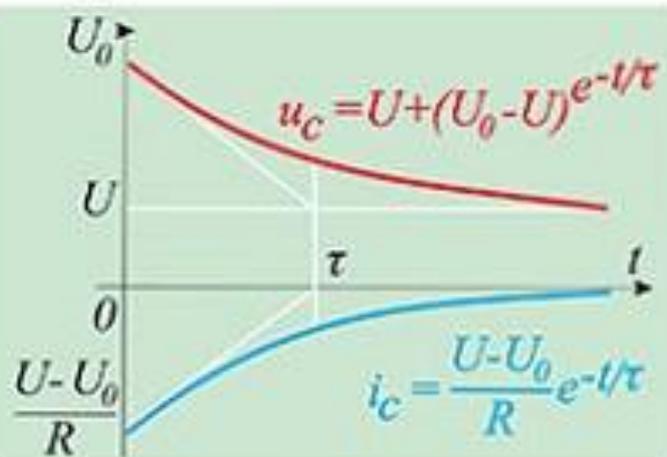
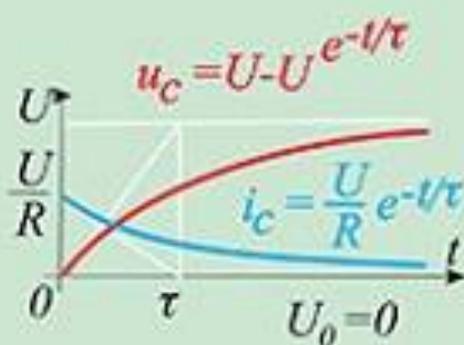


$$u_C(+0) = u_C(-0) = U_0; \quad u_{C, \text{ст}} = U;$$

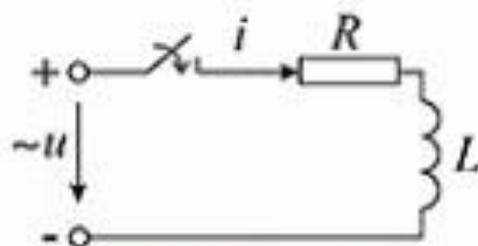
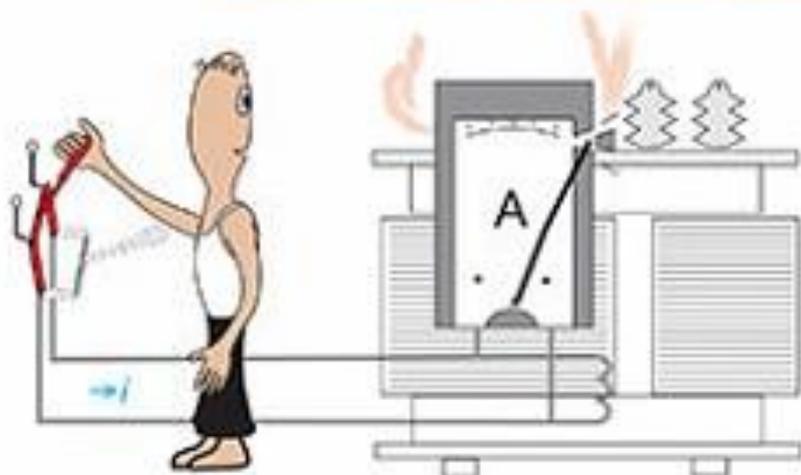
$$R + 1/pC = 0 \Rightarrow p = -1/RC; \quad \tau = RC$$

$$u_C = u_{C, \text{н.р.}} + u_{C, \text{св.}} = U + Ae^{p \cdot t}$$

$$\text{При } t = +0: U_0 = U + A \Rightarrow A = U_0 - U$$



7.4 Переходный процесс при включении катушки на синусоидальное напряжение



$$u = U_m \sin(\omega t + \psi)$$

$$i = ?$$

$$i(-0) = i(+0) = 0$$

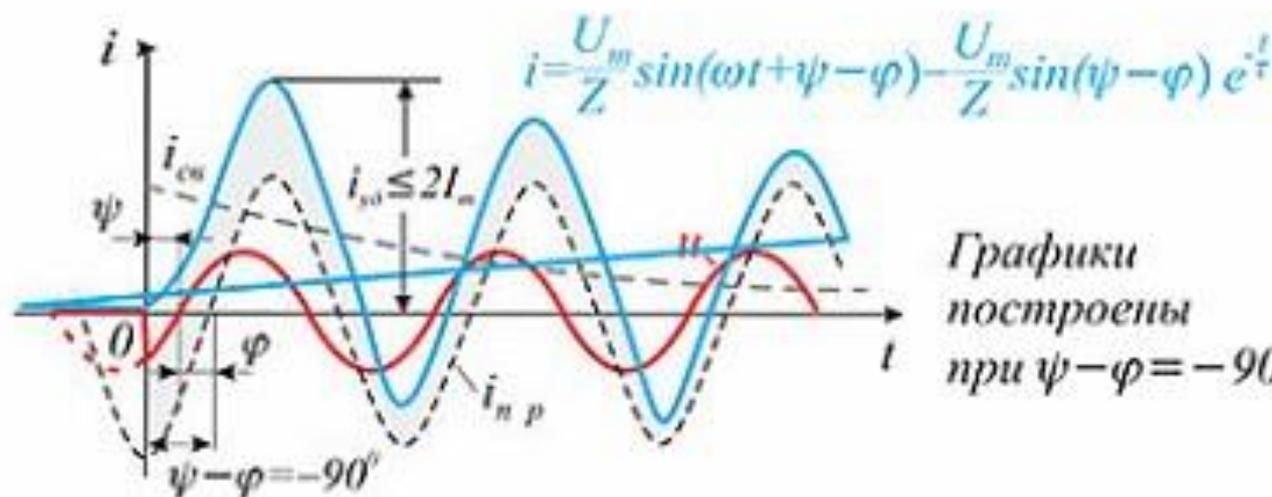
$$i_{np} = \frac{U_m}{Z} \sin(\omega t + \psi - \varphi),$$

$$\text{где } Z = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}, \quad \varphi = \arctg \frac{\omega L}{R}.$$

$$R + Lp = 0 \Rightarrow p = -\frac{R}{L}, \quad \tau = \frac{L}{R}$$

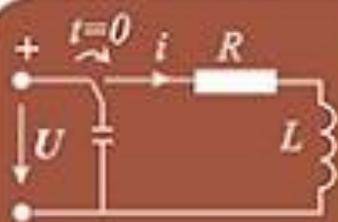
$$i = i_{np} + i_{св} = \frac{U_m}{Z} \sin(\omega t + \psi - \varphi) + Ae^{pt}$$

$$\text{При } t=0: 0 = \frac{U_m}{Z} \sin(\psi - \varphi) - A \Rightarrow A = -\frac{U_m}{Z} \sin(\psi - \varphi)$$



Графики построены при $\psi - \varphi = -90^\circ$

7.5 Переходные процессы в цепи R-L-C



$$i(+0)=0; u_C(+0)=u_L(+0)=U; i_{n.p.}=u_{Cn.p.}=u_{Ln.p.}=0.$$

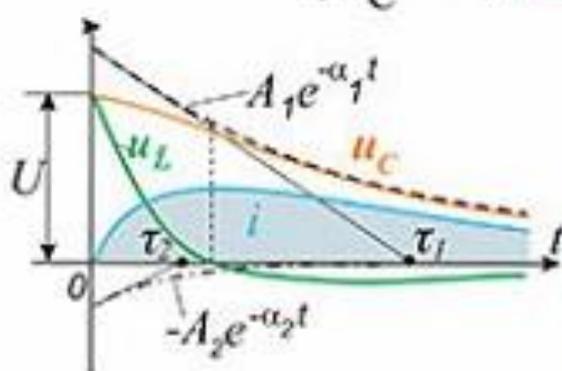
$$pL + R + \frac{1}{pC} = 0 \Rightarrow p_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}$$

$$\frac{R^2}{4L^2} > \frac{1}{LC} \text{ или } R > 2\sqrt{\frac{L}{C}} = R_{sp}$$

1
Апериодический процесс

$$p_1 = -\alpha_1, p_2 = -\alpha_2$$

$$u_C = A_1 e^{-\alpha_1 t} + A_2 e^{-\alpha_2 t}$$



$$i = -C \frac{du_C}{dt} = C(\alpha_1 A_1 e^{-\alpha_1 t} + \alpha_2 A_2 e^{-\alpha_2 t})$$

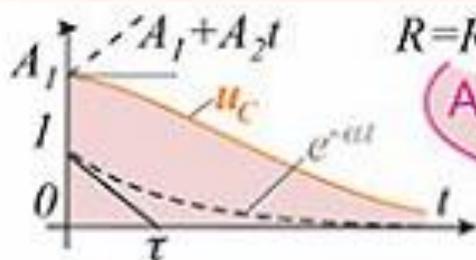
При $t=0$:

$$\begin{cases} U = A_1 + A_2 \\ 0 = \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 \end{cases}$$

 \Rightarrow

$$A_1 = U \frac{\alpha_2}{\alpha_2 - \alpha_1}$$

$$A_2 = -U \frac{\alpha_1}{\alpha_2 - \alpha_1}$$

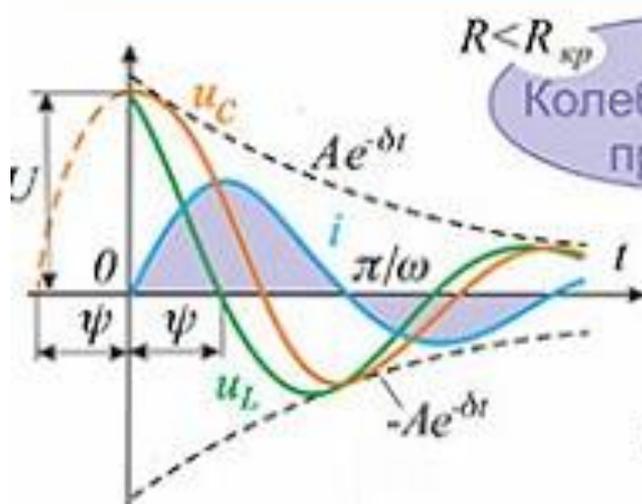


$$R = R_{sp}$$

2
Апериодический предельный

$$p_1 = p_2 = -\frac{R}{2L} = -\alpha$$

$$u_C = (A_1 + A_2 t) e^{-\alpha t}$$



$$R < R_{sp}$$

3
Колебательный процесс

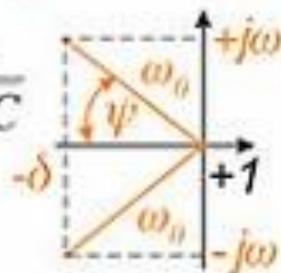
$$p_{1,2} = -\delta + j\omega$$

$$\delta = \frac{R}{2L}; \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

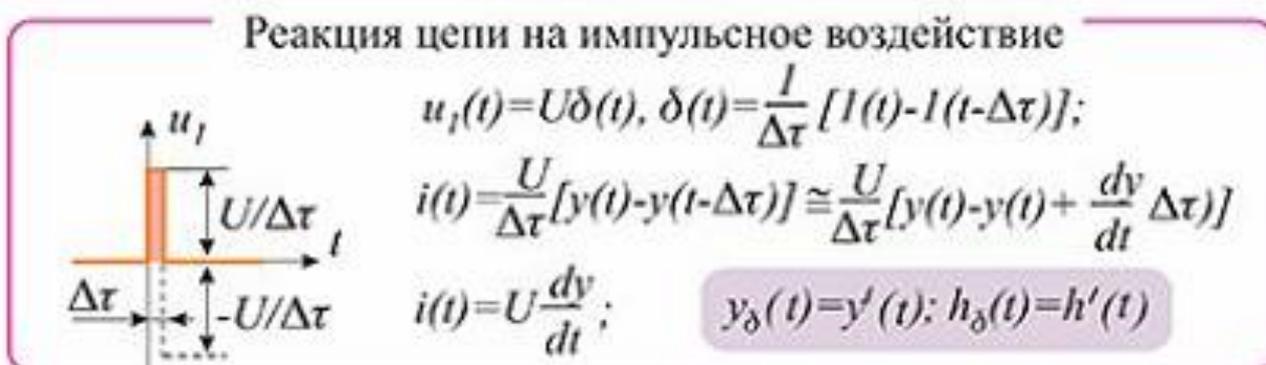
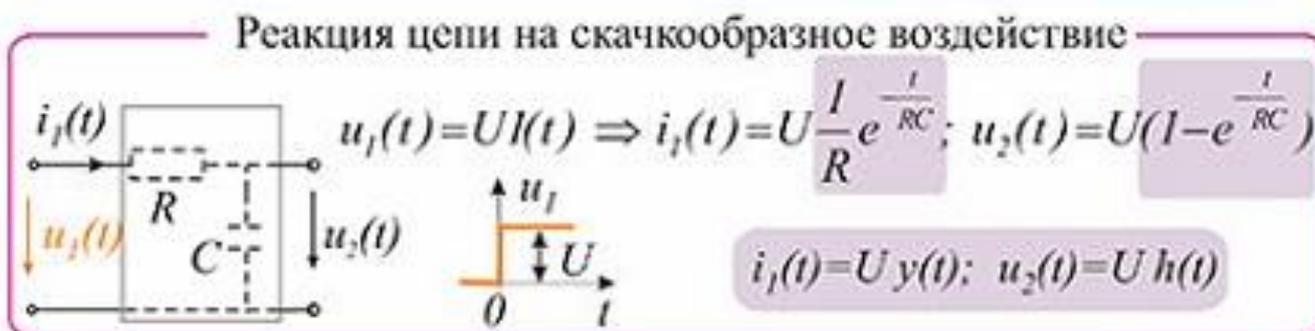
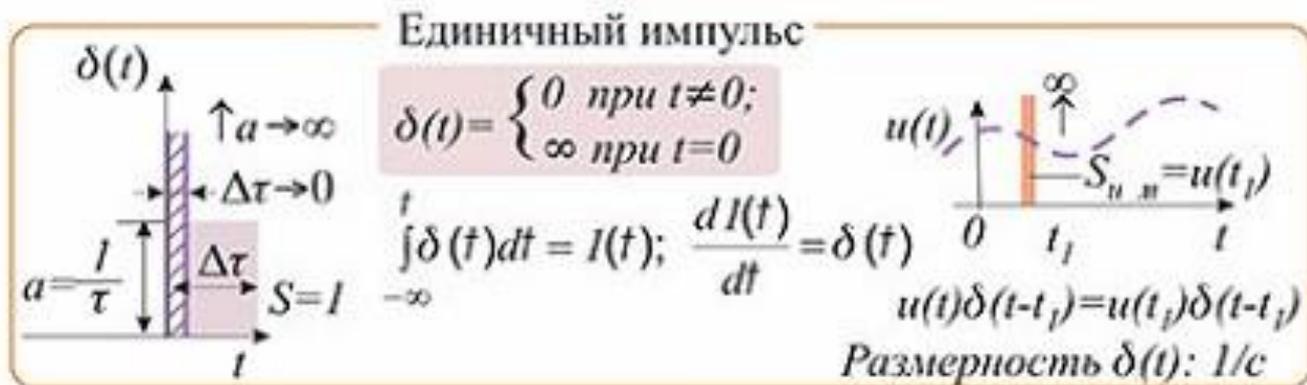
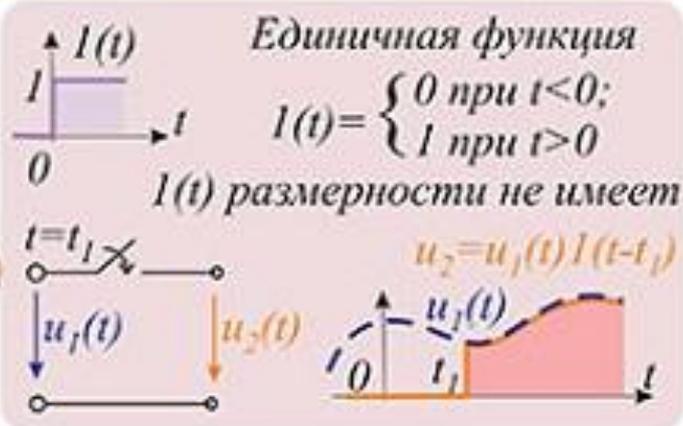
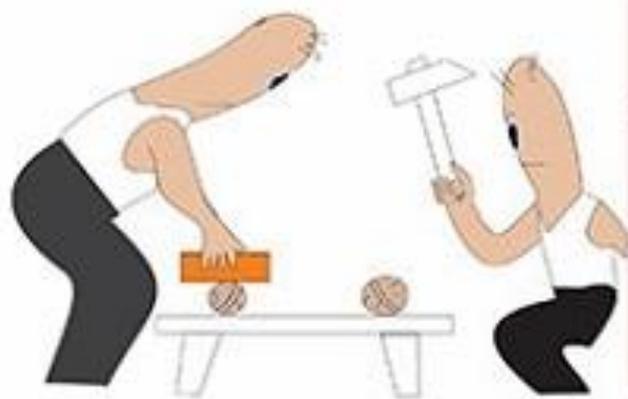
$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$$

$$u_C = A e^{-\delta t} \sin(\omega t + \psi)$$

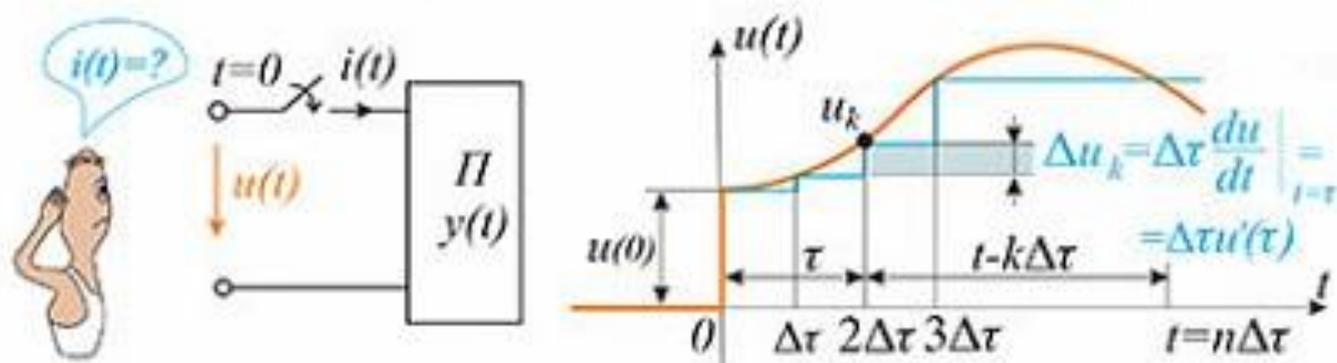
$$i = C A e^{-\delta t} [\delta \sin(\omega t + \psi) - \omega \cos(\omega t + \psi)]$$



7.6 Единичные ступенчатые и импульсные функции Переходные и импульсные характеристики цепи



7.7 Интеграл Дюамеля



Методом наложения: $i(t) \cong u(0)y(t) + \sum_{k=1}^n \Delta u_k y(t-k\Delta\tau)$.

При $\Delta\tau \rightarrow 0$: $i(t) = u(0)y(t) + \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n u'(\tau)y(t-k\Delta\tau)\Delta\tau$.

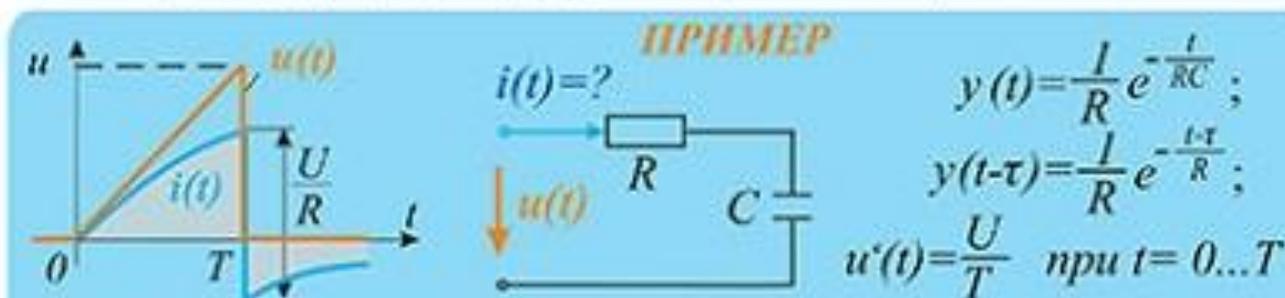
$$k\Delta\tau \rightarrow \tau \quad \sum \rightarrow \int \quad \Delta\tau \rightarrow d\tau$$

$$i(t) = u(0)y(t) + \int_0^t u'(\tau)y(t-\tau)d\tau \quad 1 \quad i(t) = u(0)y(t) + \int_0^t u'(t-\tau)y(\tau)d\tau \quad 2$$

Интегрирование по частям: $u'(\tau)d\tau = dV$; $y(t-\tau)d\tau = U$

$$i(t) = y(0)u(t) + \int_0^t y'(t-\tau)u(\tau)d\tau \quad 3 \quad i(t) = y(0)u(t) + \int_0^t y'(\tau)u(t-\tau)d\tau \quad 4$$

В (3) и (4) $y'(t-\tau)$ и $y'(\tau)$ - импульсные проводимости

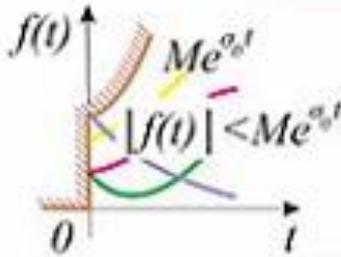


Применим первую форму записи интеграла Дюамеля

$$\text{При } t=0 \dots T: i(t) = \int_0^t \frac{U}{T} \frac{1}{R} e^{-\frac{t-\tau}{RC}} d\tau = \frac{UC}{T} (1 - e^{-\frac{t}{RC}})$$

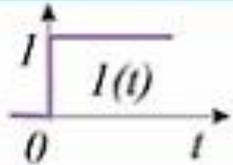
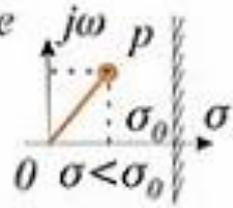
$$\text{При } t > T: i(t) = \int_0^T \frac{U}{T} \frac{1}{R} e^{-\frac{t-\tau}{RC}} d\tau - U \frac{1}{R} e^{-\frac{t-T}{RC}} = \left[\frac{UC}{T} (1 - e^{-\frac{T}{RC}}) - \frac{U}{R} \right] e^{-\frac{t-T}{RC}}$$

7.8 Преобразование Лапласа и его свойства



Оригинал - $f(t) \doteq F(p)$ - изображение

$$\Rightarrow F(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt, \text{ где } p = \sigma + j\omega$$



Изображение единичной функции

$$\Rightarrow F(p) = \int_0^{\infty} 1(t) e^{-pt} dt = -\frac{1}{p} e^{-p} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{p}; \quad 1(t) \doteq \frac{1}{p}$$

Основные свойства, теоремы и примеры их применения

$$e^{\lambda t} f(t) \doteq F(p-\lambda) \Rightarrow e^{\alpha t} 1(t) \doteq \frac{1}{p-\alpha}; \quad e^{-\alpha t} 1(t) \doteq \frac{1}{p+\alpha}$$

$$\sum a_i f_i(t) \doteq \sum a_i F_i(p) \Rightarrow \sin \omega t = \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j} \doteq \frac{1}{2j} \left(\frac{1}{p-j\omega} - \frac{1}{p+j\omega} \right) = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$$

$$f(t-t_0) \doteq e^{-ps_0} F(p) \Rightarrow \begin{array}{c} \sin \omega t \quad \sin(\omega t - \pi) \\ \hline \frac{\pi}{\omega} \end{array} \quad F(p) = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2} \left(1 + e^{-\frac{p\pi}{\omega}} \right)$$

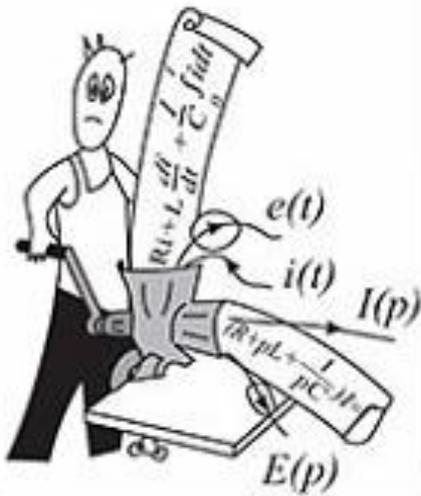
$$\frac{df}{dt} \doteq pF(p) - f(0) \Rightarrow \begin{array}{c} i \rightarrow u \\ \text{---} \end{array} \quad u = L \frac{di}{dt} \doteq U(p) = LpI(p) - Li(0)$$

$$\int_0^t f(t) dt \doteq \frac{F(p)}{p} \Rightarrow \begin{array}{c} i \rightarrow u \\ \text{---} \end{array} \quad u = \frac{1}{C} \int_0^t i dt + u(0) \doteq U(p) = \frac{I(p)}{pC} + \frac{u_c(0)}{p}$$

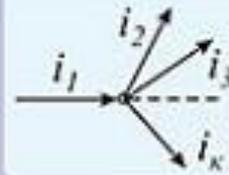
$$\begin{array}{l} f(+0) = \lim_{p \rightarrow \infty} pF(p) \Rightarrow F(p) = \frac{(p+\delta) \sin \psi + b \cos \psi}{(p+\delta)^2 + b^2} \Rightarrow f(+0) = \sin \psi \\ f(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} pF(p) \Rightarrow f(\infty) = 0 \end{array}$$

Теорема разложения $\Rightarrow F(p) = \frac{F_1(p)}{F_2(p)} \doteq \sum_{k=1}^n \frac{F_1(p_k)}{F_2'(p_k)} e^{p_k t}$

7.9 Законы электрических цепей в операторной форме

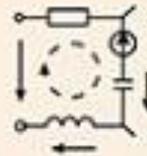


Законы Кирхгофа



$$\sum i_k = 0$$

$$\sum I_k(p) = 0$$



$$\sum u_k = \sum e_k$$

$$\sum U_k(p) = \sum E_k(p)$$

$$\sum Z_k(p) I_k(p) = \sum [E_k(p) + L_k i_k(0) - u_{Ck}(0)/p]$$

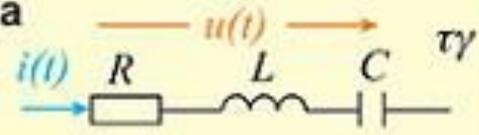
Закон Ома

$$Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt + u_C(0) = u(t);$$

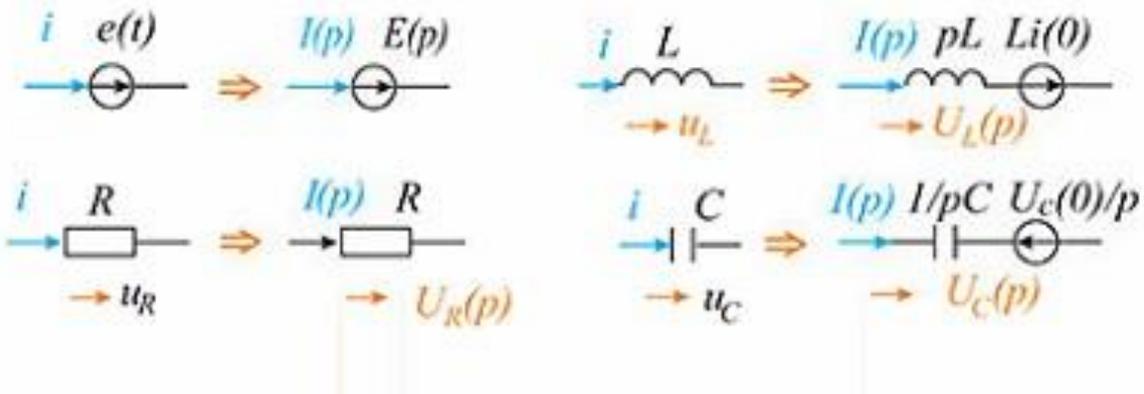
$$RI(p) + LpI(p) - Li(0) + \frac{1}{pC} I(p) + \frac{u_C(0)}{p} = U(p);$$

$$Z(p) = R + pL + \frac{1}{pC}; \quad Y(p) = \frac{1}{Z(p)}; \quad I(p) = \frac{U(p) + Li(0) - u_C(0)/p}{Z(p)}$$

При $i(0) = u_C(0) = 0$:
$$I(p) = \frac{U(p)}{Z(p)} = U(p)Y(p)$$

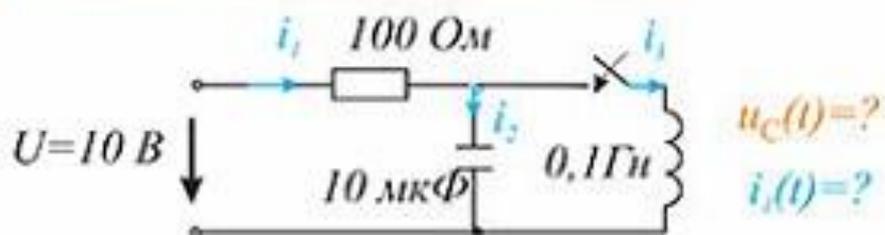


Операторные расчётные схемы



7.10 Последовательность расчёта операторным методом

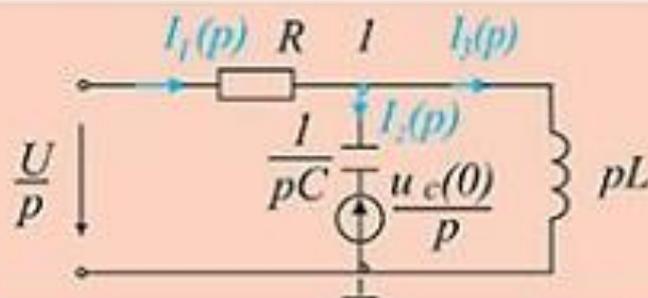
ПРИМЕР



Определение начальных значений

$$u_C(0) = 10 \text{ В}, \quad i_3(0) = 0$$

Составление операторной схемы



Расчёт операторной схемы

Методом узловых потенциалов:

$$\varphi_1(p) = \frac{J_{11}(p)}{Y_{11}(p)} = \frac{U/pR + u_C(0)pC/p}{1/R + pC + 1/pL}$$

$$\varphi_1(p) = u_C(p) = \frac{10p + 10^4}{p^2 + 10^3 p + 10^6} = \frac{F_1(p)}{F_2(p)}$$

Переход к оригиналам

$$p_{1,2} = -500 \pm j866, \quad F_2'(p) = 2p + 10^3$$

$$\frac{F_1(p_1)}{F_2'(p_1)} e^{p_1 t} = \frac{-5000 + j8660 + 10^4}{-1000 + j1732 + 1000} e^{(-500 + j866)t} = 5,77 e^{-500t} e^{j(866t - 30^\circ)}$$

$$u_C(t) = 2 \operatorname{Re} \left[\frac{F_1(p_1)}{F_2'(p_1)} e^{p_1 t} \right] = 11,5 e^{-500t} \cos(866t - 30^\circ)$$

$$i_1(t) = \frac{U}{R} - \frac{\varphi_1(t)}{R} = 0,1 - 0,115 e^{-500t} \cos(866t - 30^\circ)$$

7.11 Спектры непериодических сигналов

Преобразование	Прямое	Обратное	Ограничения
Лапласа	$F(p) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-p \cdot t} dt$	$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{-\infty}^{+\infty} F(p) e^{p \cdot t} dp$	$ f(t) < M e^{\sigma t}$
Фурье	$S(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$	$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$	$ f(t) < M e^{-\sigma t}$

Периодическая функция

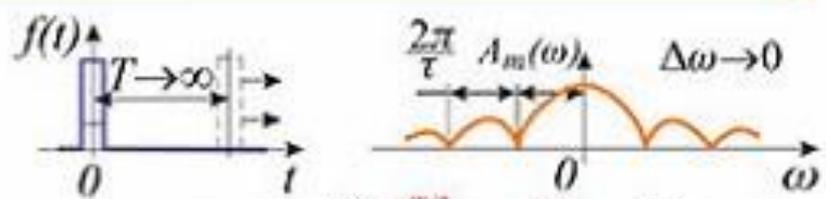
$$f(t) = \frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{+\infty} A_{km} e^{jk\omega_0 t}, \quad A_{km} = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} f(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$



Непериодическая функция

$$k\omega \rightarrow \omega, \quad \Delta\omega \rightarrow d\omega$$

$$T \rightarrow \frac{2\pi}{d\omega}, \quad \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \rightarrow \int_{\omega=-\infty}^{+\infty}$$



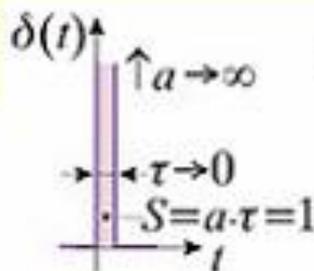
$$A_k(j\omega) = \frac{d\omega}{\pi} \int_{-T/2}^{+T/2} f(t) e^{-j\omega t} dt = \frac{d\omega}{\pi} S(j\omega)$$

Прямоугольный импульс

$$S(j\omega) = \int_{-\tau/2}^{+\tau/2} a e^{-j\omega t} dt = \frac{2a}{\omega} \sin \frac{\omega\tau}{2}$$

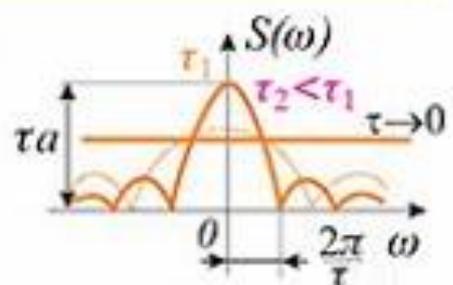
Единичный импульс

$$\delta(t) = \frac{d}{dt} [1(t)]$$

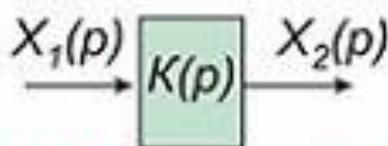


$$F(p) = p \frac{1}{p} = 1$$

$$S(j\omega) = 1$$



7.12 Передаточные функции и частотные характеристики электрических цепей



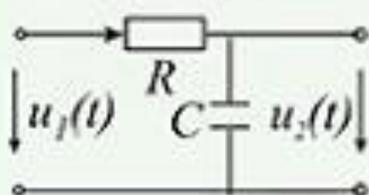
$$K(p) = \frac{X_2(p)}{X_1(p)}; \quad K(j\omega) = \frac{X_2(j\omega)}{X_1(j\omega)}$$

$X_1 \backslash X_2$	U	I
U	K_U	Y
I	Z	K_I

$$K(j\omega) = K(\omega) \cdot e^{j\varphi(\omega)} = \text{Re}[K(j\omega)] + j\text{Im}[K(j\omega)]$$

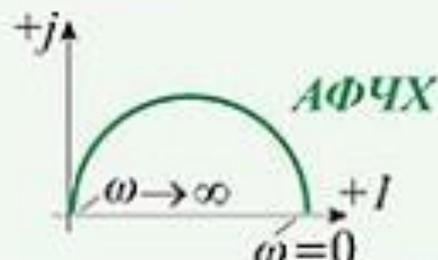
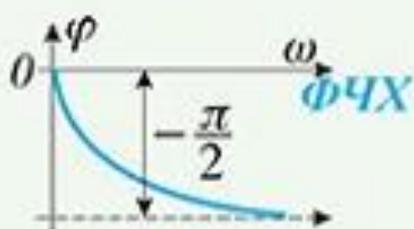
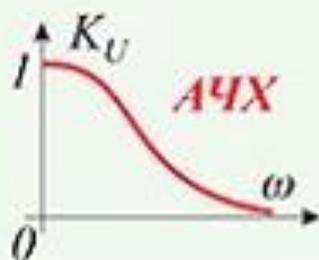
Амплитудно-фазочастотная характеристика (АФЧХ) Амплитудно-частотная (АЧХ) Фазочастотная (ФЧХ) вещественная часть мнимая часть

Пример

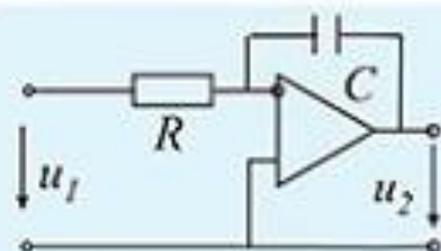


$$K_U(p) = \frac{1/pC}{R + 1/pC} = \frac{1}{RCp + 1}$$

$$K_U(j\omega) = \frac{1}{j\omega RC + 1} = \frac{1}{\sqrt{(\omega RC)^2 + 1}} e^{-j\arctan(\omega RC)}$$



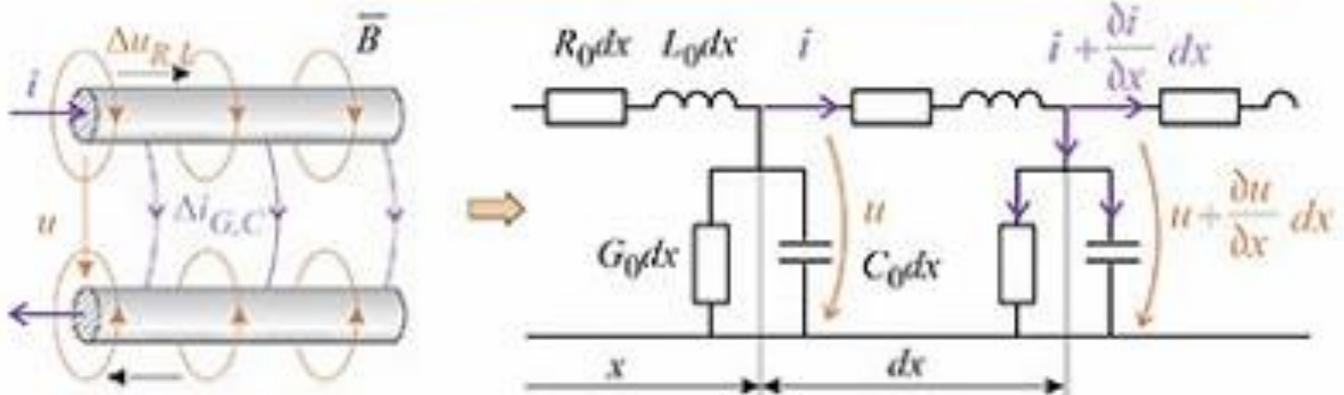
При $\omega RC \gg 1$ $K_U(j\omega) \cong \frac{1}{j\omega RC}$; $U_2(p) \cong \frac{U_1(p)}{pRC}$ Интегрирующее звено



$$\frac{U_2(p)}{U_1(p)} = \frac{1}{pRC}$$

Идеальное интегрирующее звено

8.1 Однородная длинная линия и её уравнения



R_0, L_0, G_0, C_0 - параметры линии на единицу длины

$$\begin{aligned}
 -u + R_0 dx i + L_0 dx \frac{\partial i}{\partial t} + u + \frac{\partial u}{\partial x} dx &= 0; \\
 -i + G_0 dx (u + \frac{\partial u}{\partial x} dx) + C_0 dx \frac{\partial}{\partial t} (u + \frac{\partial u}{\partial x} dx) &= 0.
 \end{aligned}
 \Rightarrow
 \begin{aligned}
 -\frac{\partial u}{\partial x} &= R_0 i + L_0 \frac{\partial i}{\partial t}; \\
 -\frac{\partial i}{\partial x} &= G_0 u + C_0 \frac{\partial u}{\partial t}.
 \end{aligned}$$

При синусоидальном режиме: $i(x,t) \Rightarrow \dot{I}(x)$; $u(x,t) \Rightarrow \dot{U}(x)$.

$$\begin{aligned}
 -\frac{d\dot{U}}{dx} = (R_0 + j\omega L_0)\dot{I} = Z_0 \dot{I}; \\
 -\frac{d\dot{I}}{dx} = (G_0 + j\omega C_0)\dot{U} = Y_0 \dot{U}.
 \end{aligned}
 \Rightarrow
 \begin{aligned}
 -\frac{d^2 \dot{U}}{dx^2} = Z_0 \frac{d\dot{I}}{dx}; \\
 -\frac{d^2 \dot{I}}{dx^2} = Y_0 \frac{d\dot{U}}{dx}.
 \end{aligned}
 \Rightarrow
 \begin{aligned}
 \frac{d^2 \dot{U}}{dx^2} = Z_0 Y_0 \dot{U}; \\
 \frac{d^2 \dot{I}}{dx^2} = Z_0 Y_0 \dot{I}.
 \end{aligned}$$

Решение уравнения для $U(x)$:

$$\dot{U} = d_1 e^{p_1 x} + d_2 e^{p_2 x}$$

Характеристическое уравнение:

$$p^2 = Z_0 Y_0 \Rightarrow p_{1,2} = \pm \sqrt{Z_0 Y_0} = \pm \gamma$$

Коэффициент распространения:

$$\gamma = \sqrt{(R_0 + j\omega L_0)(G_0 + j\omega C_0)} = \alpha + j\beta$$

(α - коэффициент затухания, β - коэффициент фазы)

$$\dot{U} = d_1 e^{-\gamma x} + d_2 e^{\gamma x}$$

$$\dot{I}(x) = -\frac{1}{Z_0} \frac{d\dot{U}}{dx} = \frac{\gamma}{Z_0} (d_1 e^{-\gamma x} - d_2 e^{\gamma x}); \text{ где } \frac{\gamma}{Z_0} = \frac{\sqrt{Z_0 Y_0}}{Z_0} = \sqrt{\frac{Y_0}{Z_0}}$$

Волновое (характеристическое) сопротивление: $Z_c = \sqrt{\frac{Z_0}{Y_0}} = Z_c e^{j\theta}$

$$\dot{I} = \frac{1}{Z_c} (d_1 e^{-\gamma x} - d_2 e^{\gamma x})$$

8.2 Бегущие волны



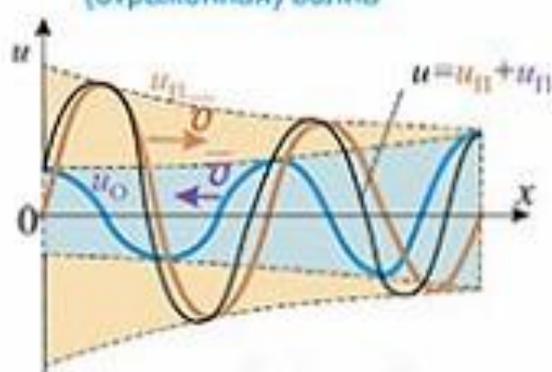
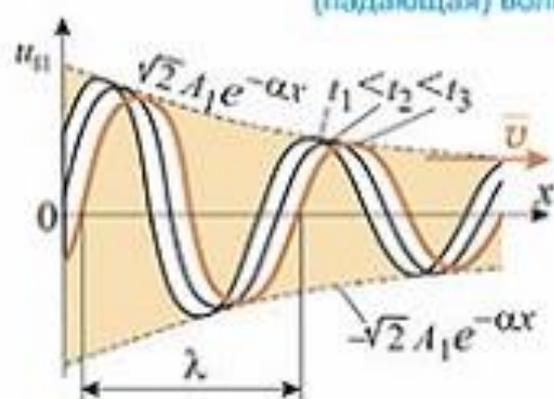
$$\dot{U}(x) = \dot{A}_1 e^{-(\alpha+j\beta)x} + \dot{A}_2 e^{(\alpha+j\beta)x}, \text{ где } \dot{A}_1 = A_1 e^{j\psi_1}, \dot{A}_2 = A_2 e^{j\psi_2}.$$

$$\dot{U}(x) = \dot{A}_1 e^{-\alpha x} e^{j(\psi_1 - \beta x)} + \dot{A}_2 e^{-\alpha x} e^{j(\psi_2 + \beta x)}.$$

$$u(x,t) = \underbrace{\sqrt{2} A_1 e^{-\alpha x} \sin(\omega t + \psi_1 - \beta x)}_{u_{11} \text{ - прямая (падающая) волна}} + \underbrace{\sqrt{2} A_2 e^{-\alpha x} \sin(\omega t + \psi_2 + \beta x)}_{u_0 \text{ - обратная (отраженная) волна}}.$$

$$i(x) = -\frac{1}{Z_C} (\dot{A}_1 e^{-\gamma x} - \dot{A}_2 e^{\gamma x}) \Rightarrow i_{11} = \frac{\dot{U}_{11}}{Z_C}; i_0 = \frac{\dot{U}_0}{Z_C}; i = i_{11} + i_0.$$

$$i(x,t) = \underbrace{\frac{\sqrt{2} A_1}{Z_C} e^{-\alpha x} \sin(\omega t + \psi_1 - \theta - \beta x)}_{i_{11} \text{ - прямая (падающая) волна}} + \underbrace{\frac{\sqrt{2} A_2}{Z_C} e^{\alpha x} \sin(\omega t + \psi_2 - \theta + \beta x)}_{i_0 \text{ - обратная (отраженная) волна}}.$$



$$\beta \lambda = 2\pi \Rightarrow \lambda = \frac{2\pi}{\beta}; \omega t + \psi_1 - \theta - \beta x = \text{const} \Rightarrow \omega - \beta \frac{dx}{dt} = 0 \Rightarrow v = \frac{\omega}{\beta} = \lambda f = \frac{\lambda}{T}$$

При $R_0 \ll \omega L_0$ и $G_0 \ll \omega C_0$: $\gamma \approx j\omega \sqrt{L_0 C_0}$

$$v \approx \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_a \epsilon_a}}$$

В воздушных линиях: $v = 3 \cdot 10^8$ м/с = с

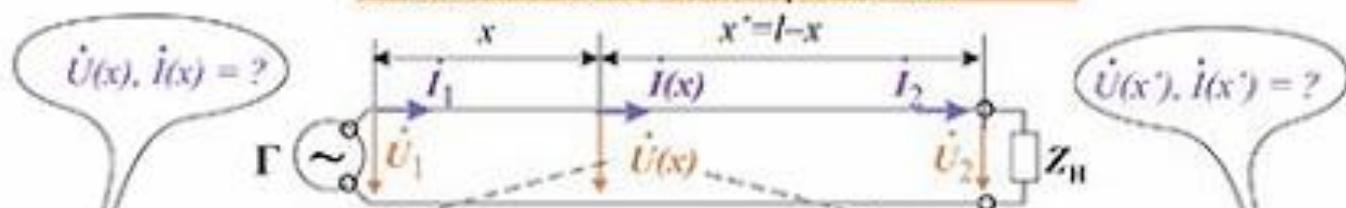
В кабельных: $\epsilon_a = (4..5)\epsilon_0$, $v \approx c/2$

$$\lambda = \frac{v}{f}$$

При $f = 50$ Гц в воздухе $\lambda = 6000$ км.

При $f = 100$ МГц в кабеле $\lambda \approx 1,5$ м.

8.3. Уравнения линии для действующих значений токов и напряжений



$$\begin{aligned} \dot{U}(x) &= \dot{A}_1 e^{-\gamma x} + \dot{A}_2 e^{\gamma x} \\ Z_C \dot{I}(x) &= \dot{A}_1 e^{-\gamma x} - \dot{A}_2 e^{\gamma x} \end{aligned}$$

При $x=0$: $\dot{U}_1(x) = \dot{A}_1 + \dot{A}_2 \Rightarrow \dot{A}_1 = \frac{1}{2}(\dot{U}_1 + Z_C \dot{I}_1)$;
 $Z_C \dot{I}_1(x) = \dot{A}_1 - \dot{A}_2 \Rightarrow \dot{A}_2 = \frac{1}{2}(\dot{U}_1 - Z_C \dot{I}_1)$.

Уравнения по началу

$$\begin{aligned} \dot{U}(x) &= \frac{1}{2}(\dot{U}_1 + Z_C \dot{I}_1) e^{-\gamma x} + \frac{1}{2}(\dot{U}_1 - Z_C \dot{I}_1) e^{\gamma x}; \\ \dot{I}(x) &= \frac{1}{2} \left(\frac{\dot{U}_1}{Z_C} + \dot{I}_1 \right) e^{-\gamma x} - \frac{1}{2} \left(\frac{\dot{U}_1}{Z_C} - \dot{I}_1 \right) e^{\gamma x}. \end{aligned}$$

При $x=l$: $\dot{U}_2 = \dot{A}_1 e^{-\gamma l} + \dot{A}_2 e^{\gamma l} \Rightarrow \dot{A}_1 = \frac{1}{2}(\dot{U}_2 + Z_C \dot{I}_2) e^{\gamma l}$;
 $Z_C \dot{I}_2 = \dot{A}_1 e^{-\gamma l} - \dot{A}_2 e^{\gamma l} \Rightarrow \dot{A}_2 = \frac{1}{2}(\dot{U}_2 - Z_C \dot{I}_2) e^{-\gamma l}$.

Уравнения по концу $x=l-x'$

$$\begin{aligned} \dot{U}(x') &= \frac{1}{2}(\dot{U}_2 + Z_C \dot{I}_2) e^{\gamma x'} + \frac{1}{2}(\dot{U}_2 - Z_C \dot{I}_2) e^{-\gamma x'}; \\ \dot{I}(x') &= \frac{1}{2} \left(\frac{\dot{U}_2}{Z_C} + \dot{I}_2 \right) e^{\gamma x'} - \frac{1}{2} \left(\frac{\dot{U}_2}{Z_C} - \dot{I}_2 \right) e^{-\gamma x'}. \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2}(e^{\gamma x'} + e^{-\gamma x'}) = \text{ch } \gamma x' \quad ; \quad \frac{1}{2}(e^{\gamma x'} - e^{-\gamma x'}) = \text{sh } \gamma x'$$

Уравнения с гиперболическими функциями

$$\begin{aligned} \dot{U}(x) &= \dot{U}_1 \text{ch } \gamma x - Z_C \dot{I}_1 \text{sh } \gamma x \quad ; \\ \dot{I}(x) &= -\frac{\dot{U}_1}{Z_C} \text{sh } \gamma x + \dot{I}_1 \text{ch } \gamma x \quad . \end{aligned}$$

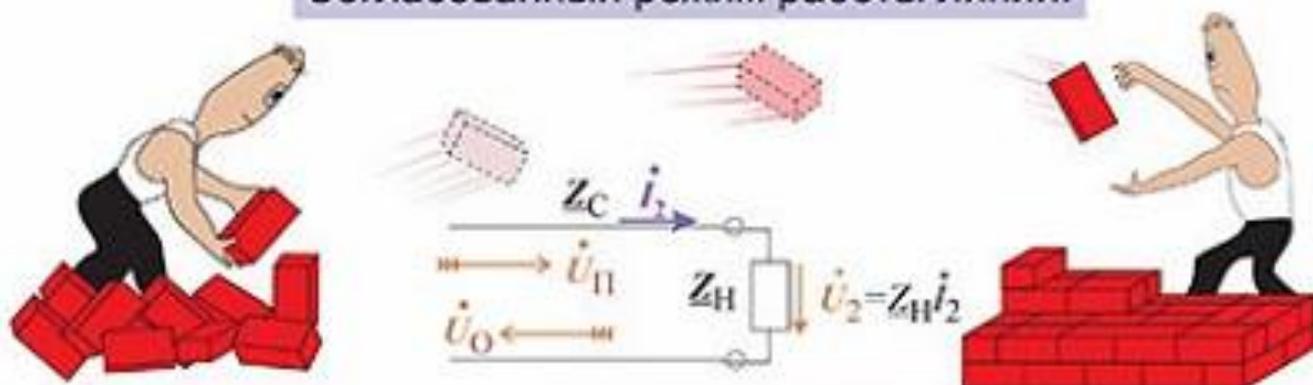
по началу

$$\begin{aligned} \dot{U}(x') &= \dot{U}_2 \text{ch } \gamma x' + Z_C \dot{I}_2 \text{sh } \gamma x' \quad ; \\ \dot{I}(x') &= \frac{\dot{U}_2}{Z_C} \text{sh } \gamma x' + \dot{I}_2 \text{ch } \gamma x' \quad . \end{aligned}$$

по концу

8.4. Коэффициент отражения волны.

Согласованный режим работы линии.



$$\begin{aligned} \dot{U}_\Pi &= \frac{1}{2} (\dot{U}_2 + Z_C \dot{i}_2) = \frac{1}{2} (Z_H + Z_C) \dot{i}_2; \\ \dot{U}_0 &= \frac{1}{2} (\dot{U}_2 - Z_C \dot{i}_2) = \frac{1}{2} (Z_H - Z_C) \dot{i}_2. \end{aligned}$$

$$k_U = \frac{\dot{U}_0}{\dot{U}_\Pi} = \frac{Z_H - Z_C}{Z_H + Z_C}; \quad \dot{U}_0 = k_U \dot{U}_\Pi$$

$$\dot{i}_\Pi = \frac{\dot{U}_\Pi}{Z_C}; \quad \dot{i}_\Pi = -\frac{\dot{U}_0}{Z_C}$$

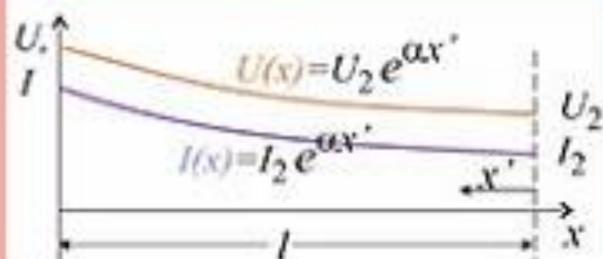
$$k_I = \frac{\dot{i}_0}{\dot{i}_\Pi} = \frac{Z_C - Z_H}{Z_H + Z_C}; \quad \dot{i}_0 = k_I \dot{i}_\Pi$$

При $Z_H = Z_C$: $\dot{U}_0 = 0, \dot{i}_0 = 0, k_U = k_I = 0, Z_C \dot{i}_2 = \dot{U}_2$

$$\dot{U}(x') = \dot{U}_2 e^{j\alpha x'}$$

$$\dot{i}(x') = \dot{i}_2 e^{j\alpha x'}$$

$$\Rightarrow \frac{\dot{U}(x')}{\dot{i}(x')} = \frac{\dot{U}_2}{\dot{i}_2} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{i}_1} = Z_C \Rightarrow Z_{ax} = Z_C = Z_C e^{j\theta}$$

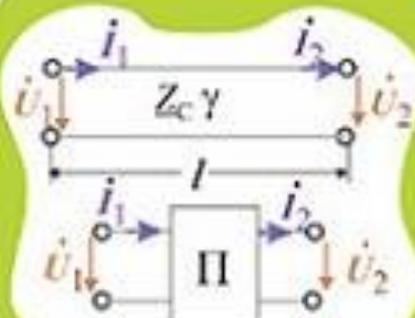


$$P(x') = Ul \cos \theta = U_2 I_2 e^{2\alpha x'} \cos \theta$$

$$P_2 = U_2 I_2 \cos \theta$$

$$P_1 = U_2 I_2 e^{2\alpha l} \cos \theta \Rightarrow \text{к.п.д.} = e^{-2\alpha l}$$

Линия как четырёхполюсник



$$U_1 = U_2 \text{ch } \gamma l + Z_C I_2 \text{sh } \gamma l;$$

$$I_1 = \frac{\dot{U}_2}{Z_C} \text{sh } \gamma l + I_2 \text{ch } \gamma l.$$

$$\dot{U}_1 = A \dot{U}_2 + B \dot{i}_2;$$

$$\dot{i}_1 = C \dot{U}_2 + D \dot{i}_2.$$

$$A = \text{ch } \gamma l;$$

$$B = Z_C \text{sh } \gamma l;$$

$$C = \frac{1}{Z_C} \text{sh } \gamma l;$$

$$D = \text{ch } \gamma l = A;$$

$$AD - BC = \text{ch}^2 \gamma l - \text{sh}^2 \gamma l = 1.$$

8.5. Вторичные параметры однородной линии.

Линия без искажений.



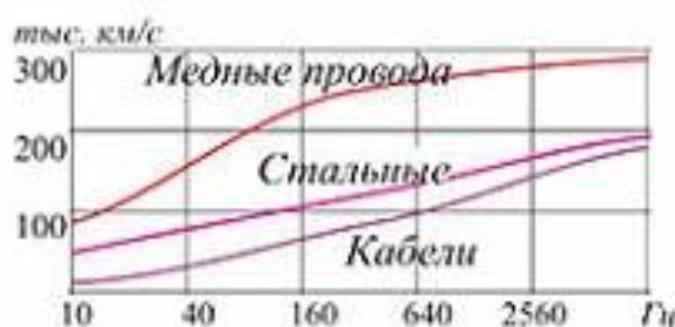
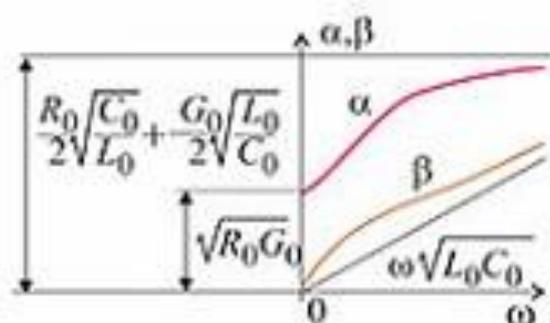
Коэффициент распространения:

$$\gamma = \sqrt{(R_0 + j\omega L_0)(G_0 + j\omega C_0)} = \alpha + j\beta.$$

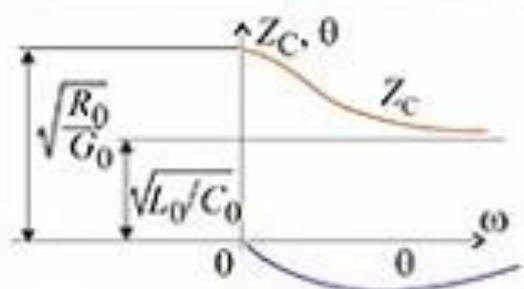


Коэффициент затухания: $\alpha = \sqrt{\frac{1}{2} \left[R_0 G_0 - \omega^2 L_0 C_0 + \sqrt{(R_0^2 + \omega^2 L_0^2)(G_0^2 + \omega^2 C_0^2)} \right]}$.

Коэффициент фазы: $\beta = \sqrt{\frac{1}{2} \left[\omega^2 L_0 C_0 - R_0 G_0 + \sqrt{(R_0^2 + \omega^2 L_0^2)(G_0^2 + \omega^2 C_0^2)} \right]}$.



Волновое сопротивление:



$$Z_c = \sqrt{\frac{R_0 + j\omega L_0}{G_0 + j\omega C_0}}$$

При $\omega L_0 \gg R_0$ и $\omega C_0 \gg G_0$

$$Z_c = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} = Z_c, \quad \theta = 0$$

Амплитудные искажения обусловлены $\alpha(\omega)$, фазовые - $\nu(\omega)$.

При $\frac{L_0}{R_0} = \frac{C_0}{G_0}$ $\gamma = \sqrt{R_0 G_0 (1 + j\omega \frac{L_0}{R_0})(1 + j\omega \frac{C_0}{G_0})} = \sqrt{R_0 G_0} (1 + j\omega \frac{L_0}{R_0})$.

$$\sqrt{R_0 G_0} \frac{L_0}{R_0} = \sqrt{R_0 G_0} \frac{L_0}{R_0} \frac{C_0}{G_0} = \sqrt{L_0 C_0}$$

$$\gamma = \sqrt{R_0 G_0} + j\omega \sqrt{L_0 C_0}$$

$$Z_c = \sqrt{\frac{L_0 (R_0/L_0 + j\omega)}{C_0 (G_0/C_0 + j\omega)}} = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} \Rightarrow$$

$$Z_c \neq f(\omega) \quad \alpha \neq f(\omega) \quad \nu = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}} \neq f(\omega)$$

Неискажающая линия

8.6. Линия без потерь

$$R_0=0, G_0=0$$

$$\alpha=0$$

$$\beta=\sqrt{L_0 C_0}$$

$$Z_C=\sqrt{\frac{L_0}{C_0}}=Z_C, \theta=0$$

$$v=\frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}}$$

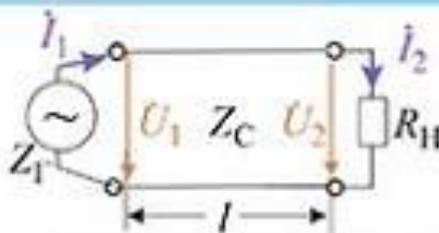
$$\operatorname{ch} \gamma x = \operatorname{ch} j \beta x = \cos \beta x; \quad \operatorname{sh} \gamma x = j \sin \beta x$$

$$\dot{U}(x) = \dot{U}_1 \cos \beta x - j \dot{I}_1 Z_C \sin \beta x;$$

$$\dot{i}(x) = -j \frac{\dot{U}_1}{Z_C} \sin \beta x + \dot{I}_1 \cos \beta x.$$

$$\dot{U}(x') = \dot{U}_2 \cos \beta x' + j \dot{I}_2 Z_C \sin \beta x';$$

$$\dot{i}(x') = j \frac{\dot{U}_2}{Z_C} \sin \beta x' + \dot{I}_2 \cos \beta x'.$$



При $l = \frac{\lambda}{4}$; $\beta l = \frac{\beta \lambda}{4} = \frac{\pi}{4}$; $\cos \beta l = 0$; $\sin \beta l = 1$.

$$\dot{U}_1 = j Z_C \dot{I}_2; \quad \dot{I}_1 = j \frac{\dot{U}_2}{Z_C}; \quad Z_{\text{ex}} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} = \frac{Z_C^2}{R_H}$$

Для согласования необходимо: $Z_{\text{ex}} = Z_{\Gamma}$, т.е. $Z_C = \sqrt{Z_{\Gamma} Z_{H}}$

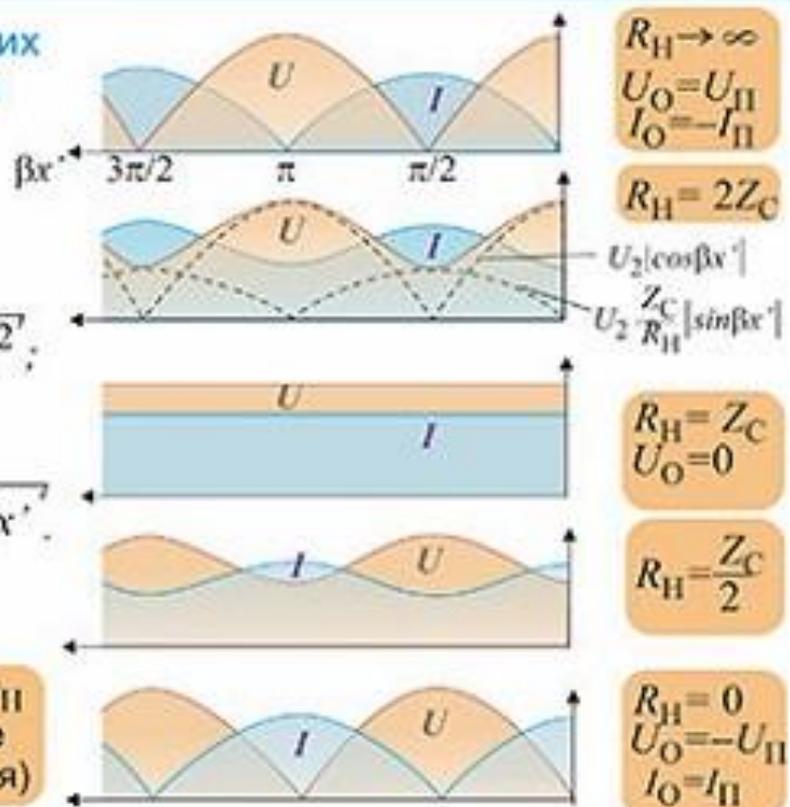
При $l = \frac{\lambda}{2}$; $\beta l = \pi$; $\dot{U}_1 = -\dot{U}_2$; $\dot{I}_1 = -\dot{I}_2$; $Z_{\text{ex}} = Z_H$

Распределение действующих значений U и I вдоль линии

$$U_2 = I_2 R_H; \quad I_2 = \frac{U_2}{R_H}$$

$$U(x') = U_2 \sqrt{\cos^2 \beta x' + \left(\frac{Z_C}{R_H} \sin \beta x'\right)^2};$$

$$I(x') = I_2 \sqrt{\left(\frac{R_H}{Z_C} \sin \beta x'\right)^2 + \cos^2 \beta x'}.$$



При $Z_{II}=0$, $Z_{II}=\infty$ и $Z_{II}=\pm jx_{II}$
 полное отражение – стоячие
 волны (энергия не передается)

9.1 Общее решение уравнений линий без потерь

Уравнения :

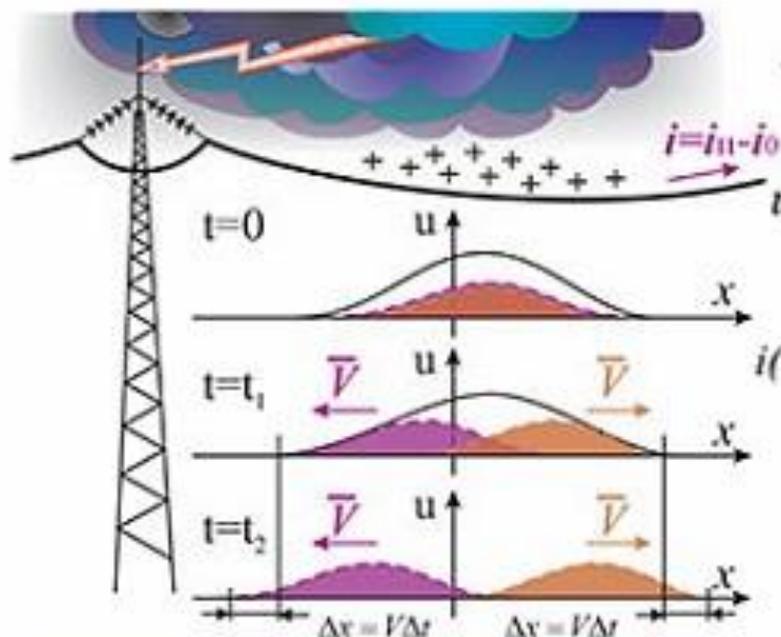
$$-\frac{\partial u}{\partial x} = L_0 \frac{\partial i}{\partial t}; \quad -\frac{\partial i}{\partial x} = C_0 \frac{\partial u}{\partial t}$$

Решение :

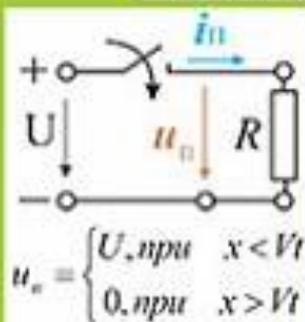
$$u(x,t) = \underbrace{f_1(x-Vt)}_{u_n} + \underbrace{f_2(x+Vt)}_{u_0}$$

$$i(x,t) = \underbrace{\frac{f_1(x-Vt)}{Z_c}}_{i_n} + \underbrace{\frac{f_2(x+Vt)}{Z_c}}_{i_0}$$

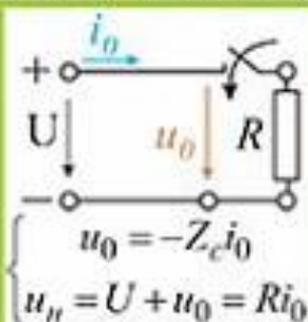
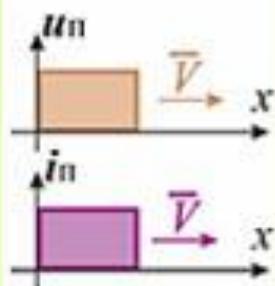
$$Z_c = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}}; \quad V = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}}$$



Возникновение волн с прямоугольным фронтом



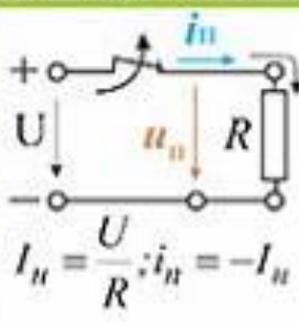
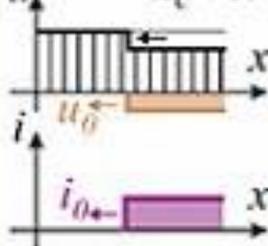
$$i_n = \frac{u_n}{Z_c}$$



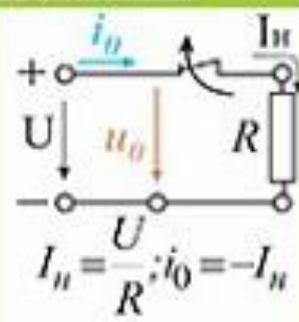
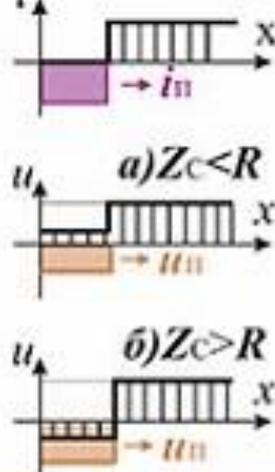
Отсюда :

$$i_0 = \frac{U}{Z_c + R}$$

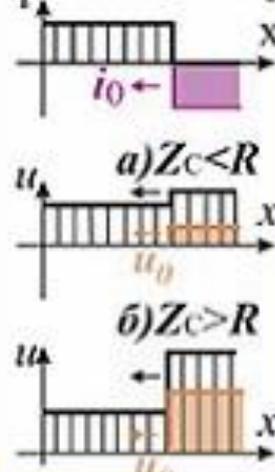
$$u_0 = -U \frac{Z_c}{Z_c + R}$$



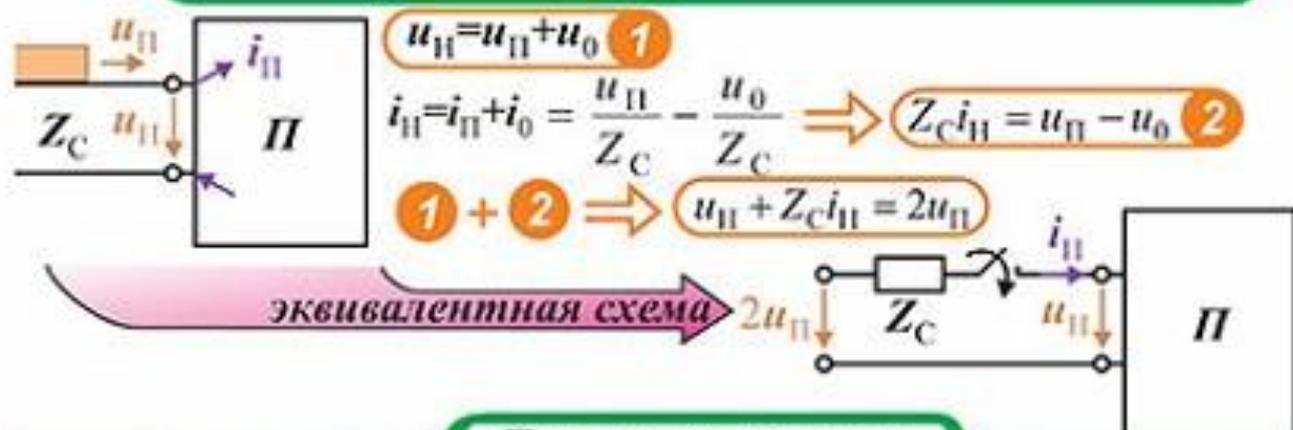
$$u_n = Z_c i_n = -U \frac{Z_c}{R}$$



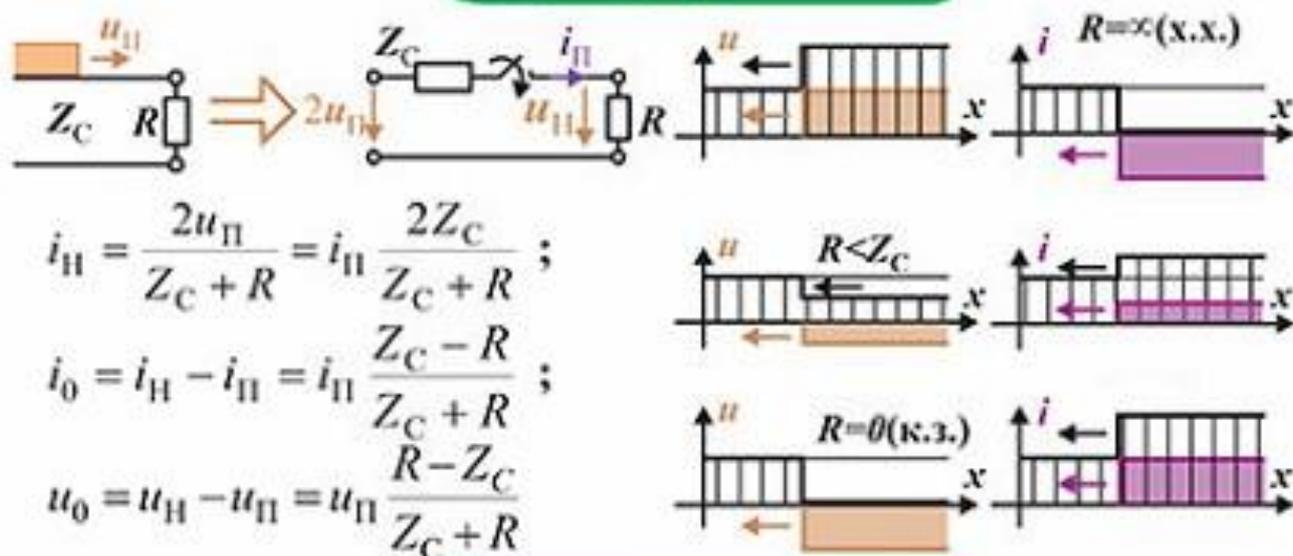
$$u_0 = -Z_c i_0 = U \frac{Z_c}{R}$$



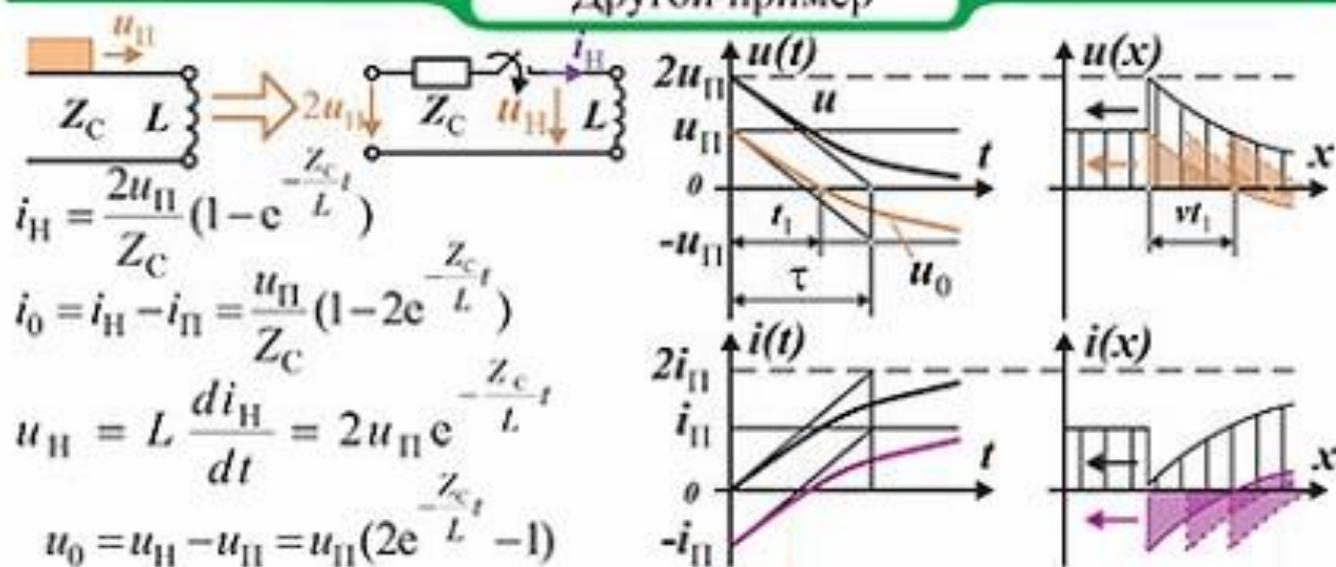
9.2 Общий метод определения отраженных волн



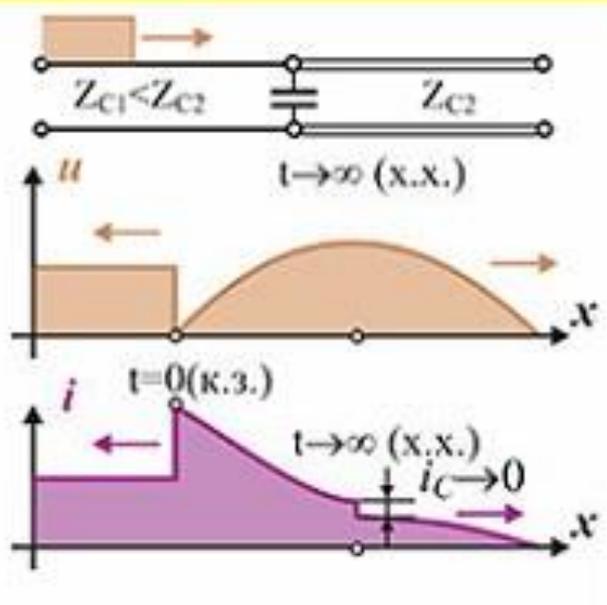
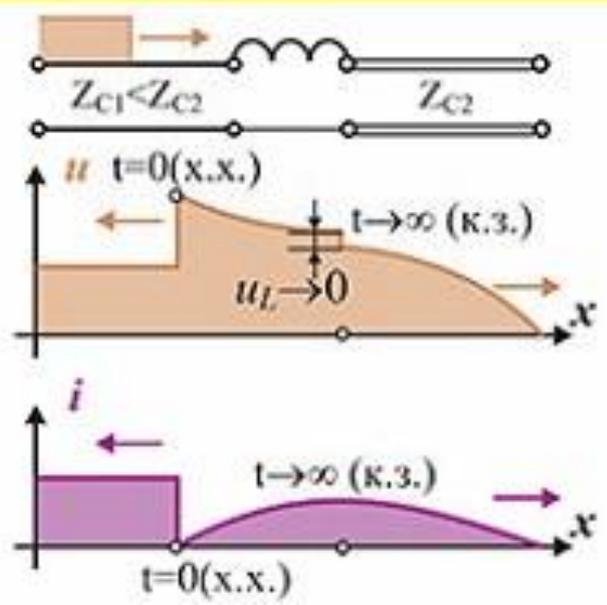
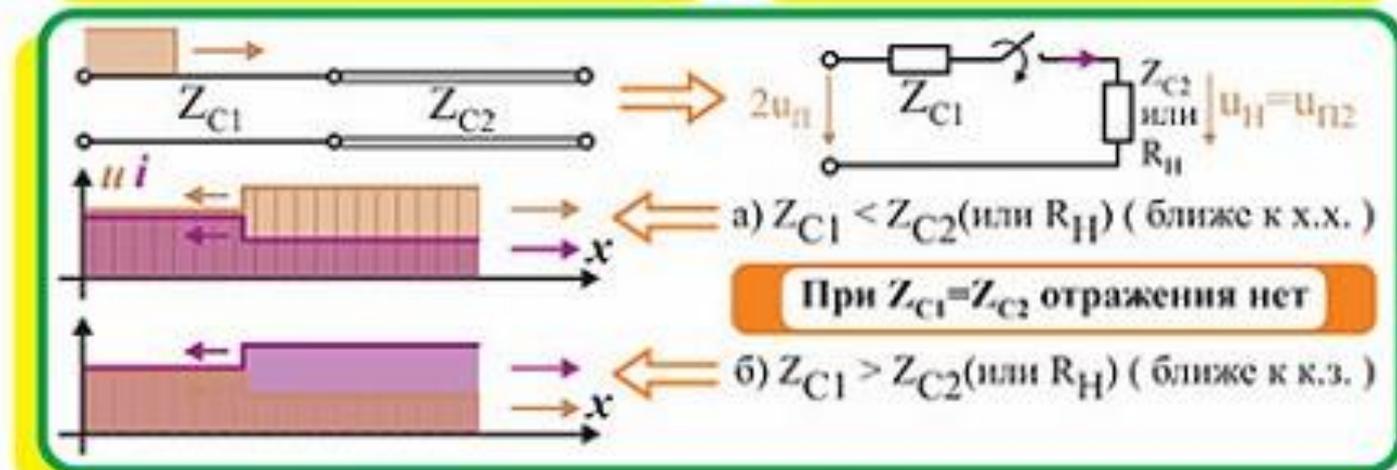
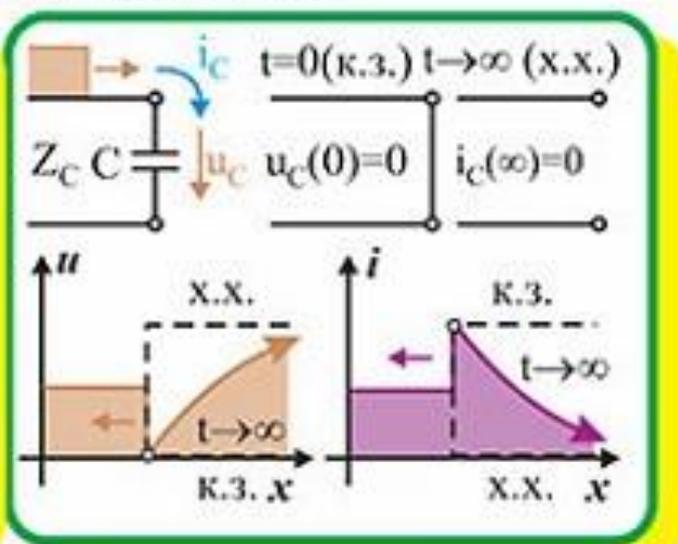
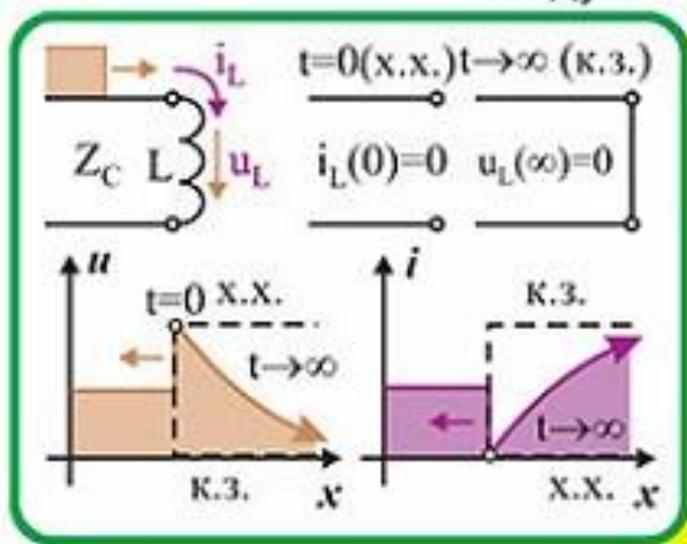
Пример применения



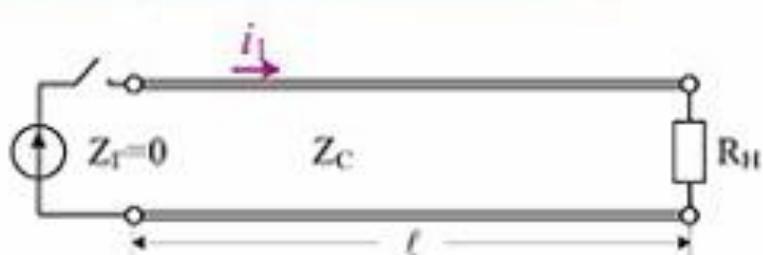
Другой пример



9.3 Качественный анализ переходных процессов в линиях, содержащих сопротивление, индуктивности и емкости



9.4 Многократные отражения волн в линии



Коэффициенты отражения:

от генератора

от нагрузки

$$K_U = -1 \quad K_I = +1 \quad K_U = \frac{R_n - Z_c}{R_n + Z_c}; \quad K_I = -K_U$$

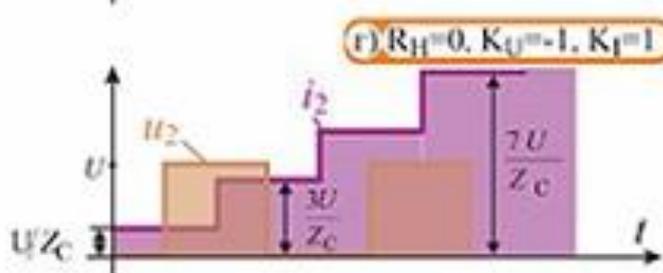
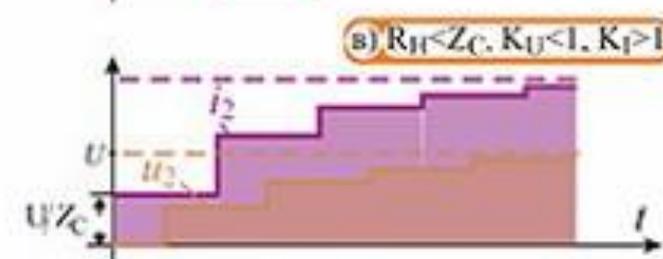
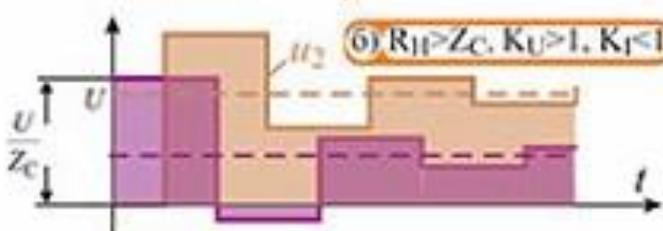
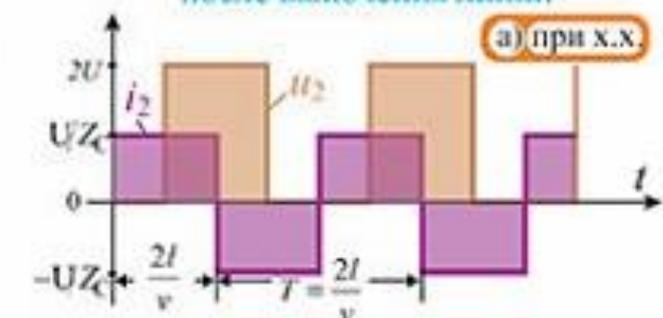
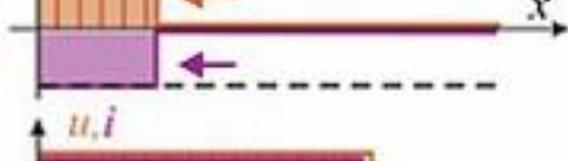
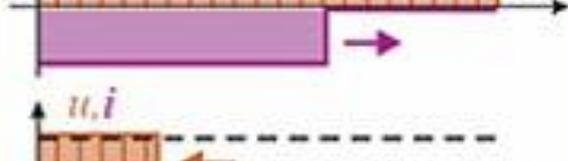
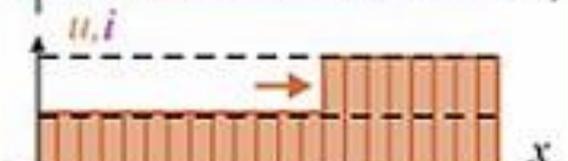
(как от К.З.)

Изменение напряжения U_2 и тока I_1 после включения линии

Включение линии на х.х.

$$R_n = \infty, K_{UH} = +1, K_{IH} = -1$$

$$R_r = 0, K_{UR} = -1, K_{IR} = +1$$

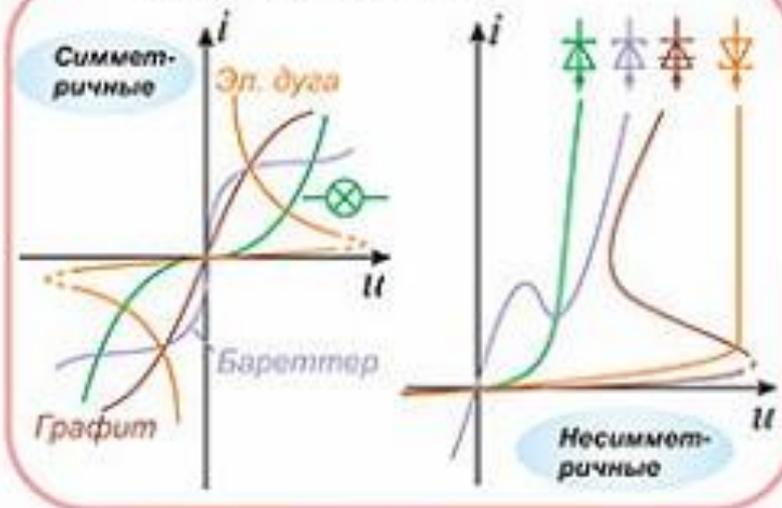


10.1 Резистивные нелинейные элементы и их характеристики

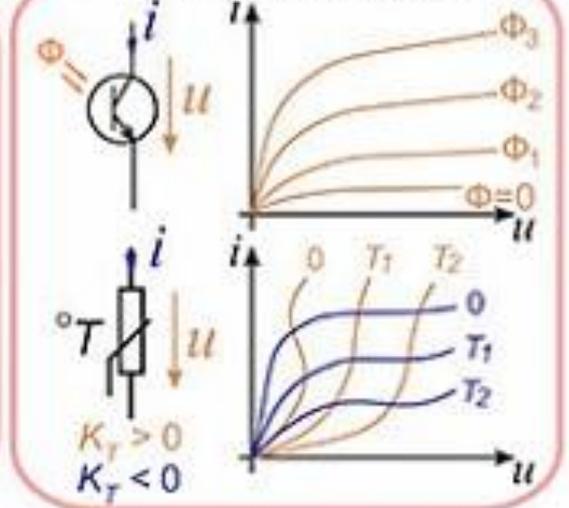
А. Двухполюсные элементы



Неуправляемые

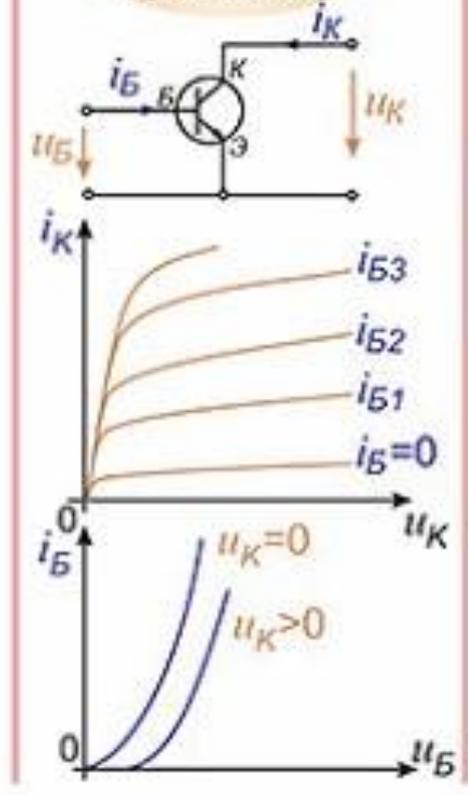


Управляемые

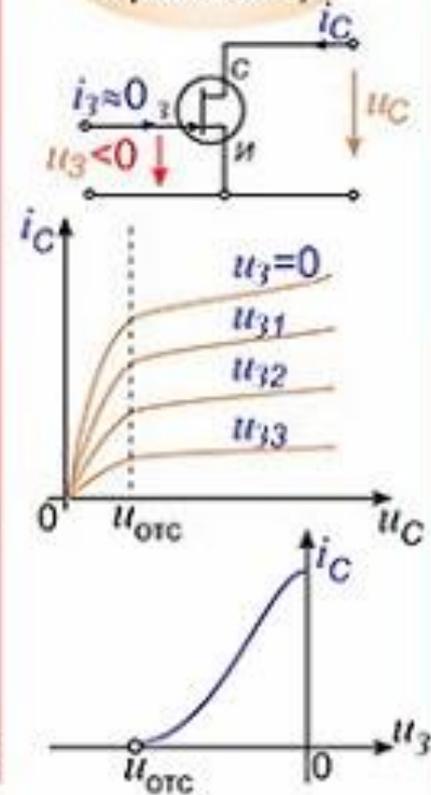


Б. Трехполюсные управляемые элементы (нелинейные четырёхполюсники)

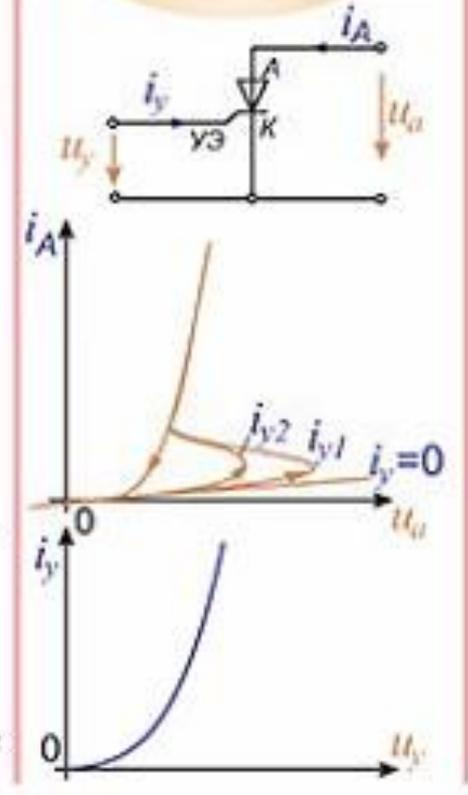
Биполярная транзистор



Полевой транзистор



Тиристор

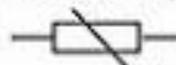


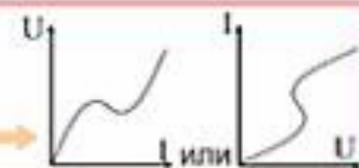
10.2 Графический расчет при последовательно-параллельном соединении двухполюсных элементов

Используемые законы

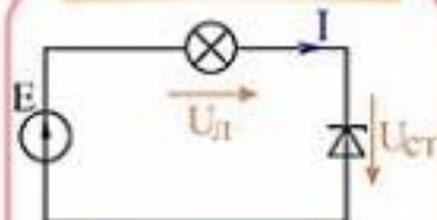
1  $\sum I_K = 0$

2  $\sum U_K = \sum E_K$

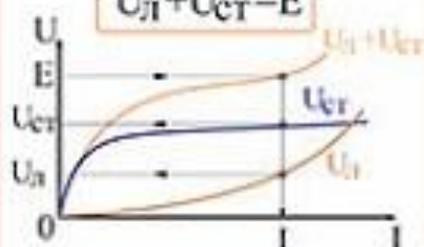
3  Вместо $U=RI$ →



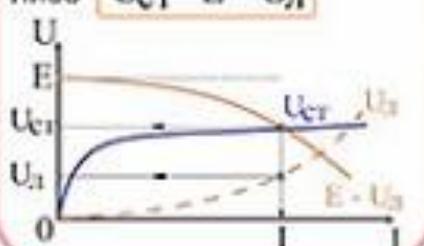
Последовательное



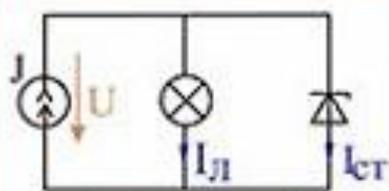
$U_L + U_{Cr} = E$



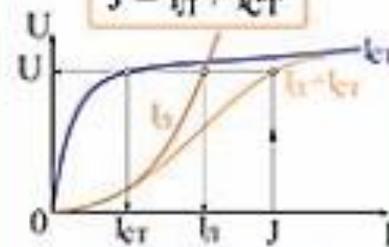
либо $U_{Cr} = E - U_L$



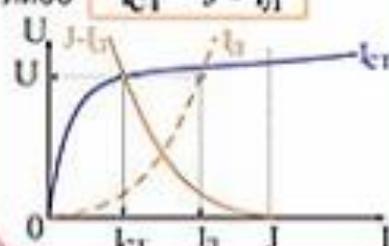
Параллельное



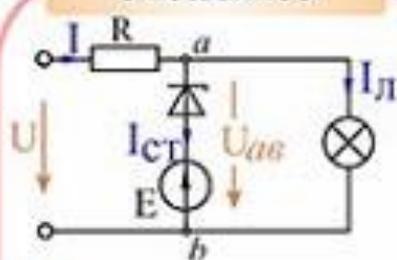
$J = I_L + I_{Cr}$



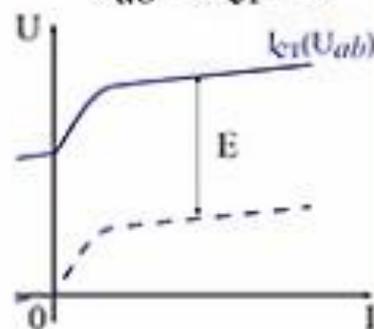
либо $I_{Cr} = J - I_L$



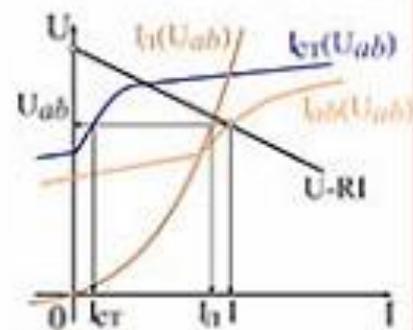
Смешанное



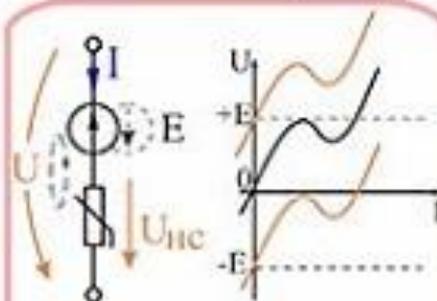
1 $U_{ab} = U_{Cr} + E$



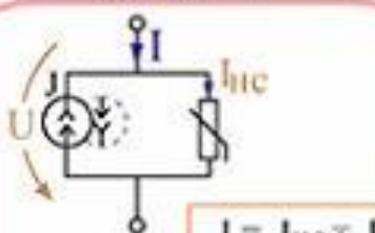
2 $I = I_{Cr}(U_{ab}) + I_L(U_{ab})$



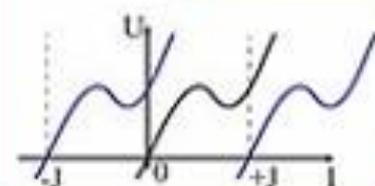
3 $U - RI = U_{ab}$



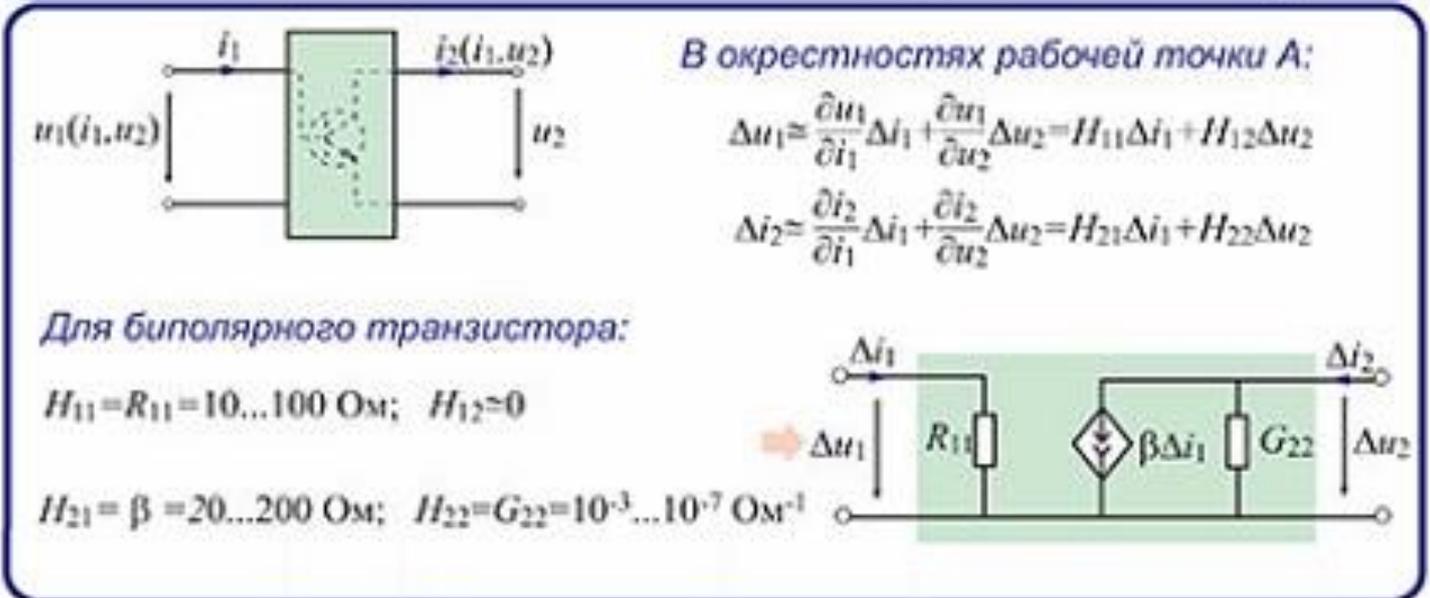
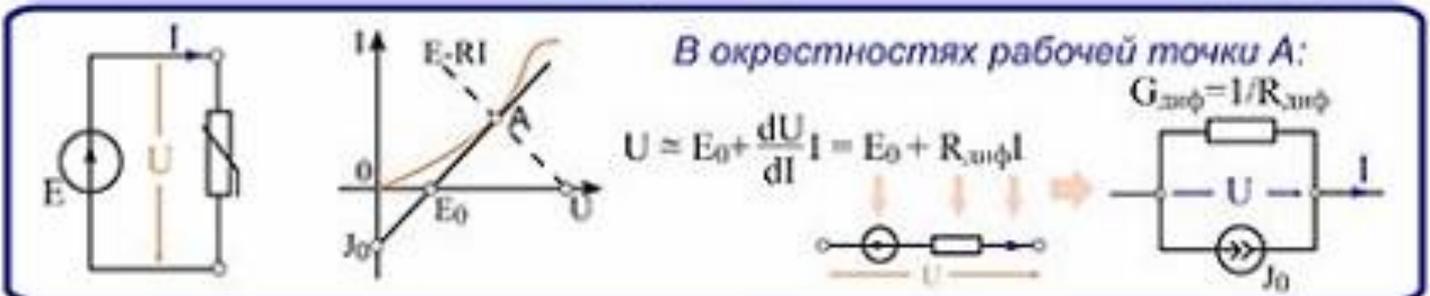
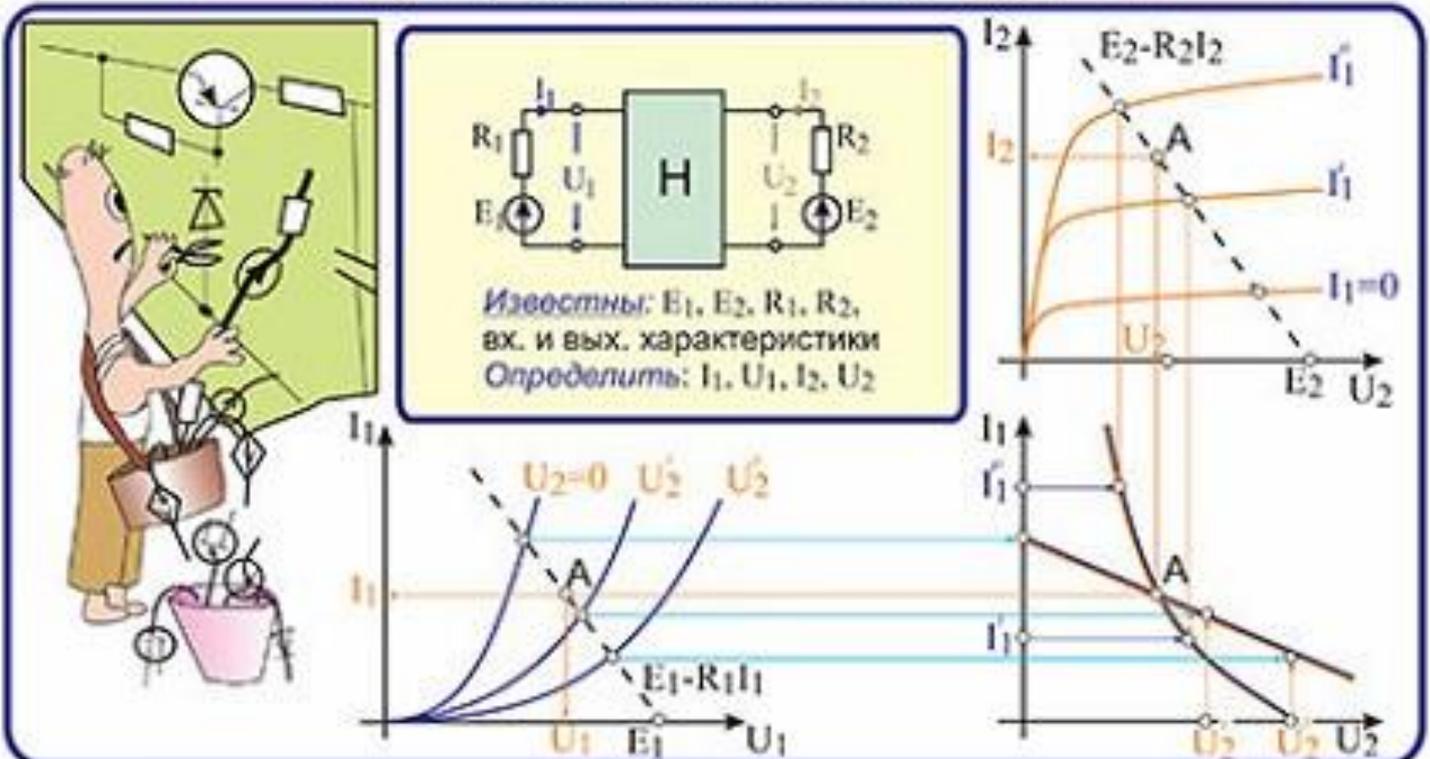
$-U + U_{Rc} = \mp E$
 $U = U_{Rc} \pm E$



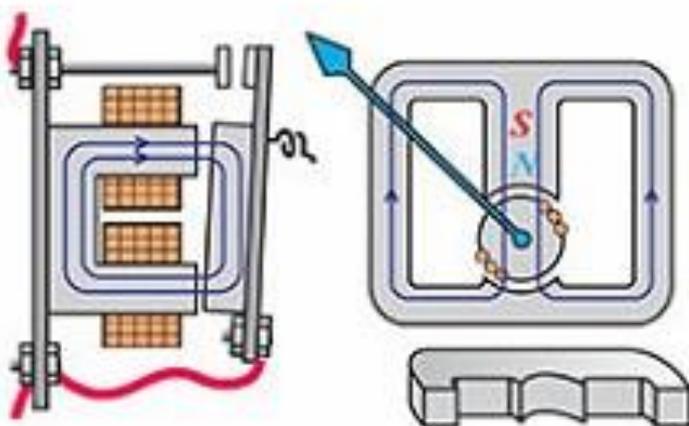
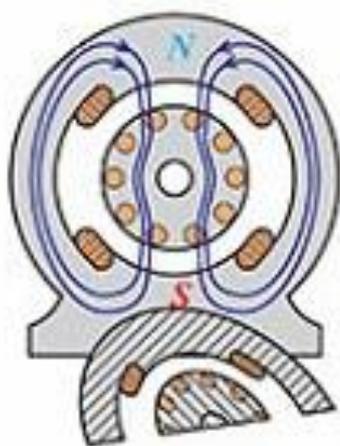
$I = I_{Rc} \mp J$



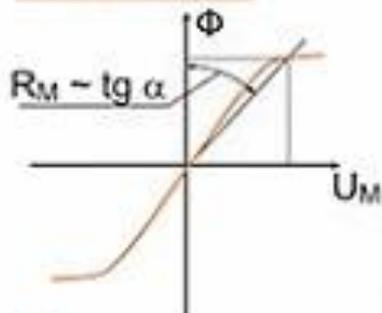
10.3 Графический расчет цепи с нелинейным четырехполюсником. Линейные схемы замещения нелинейных элементов



10.4 Основные понятия, допущения при расчете и законы магнитных цепей



Понятия:



$\Phi = \int \vec{B} d\vec{S}$ - магнитный поток [Вб];

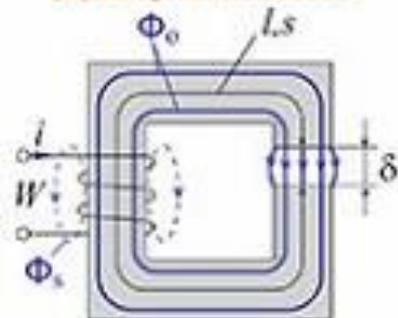
$U_M = \int \vec{H} d\vec{l}$ - магнитное напряжение [А];
(намагничивающая сила)

$F = iW$ - магнитодвижущая сила (МДС) [А];

$\Phi(U_M)$ - вебер-амперная характеристика

$R_M = U_M / \Phi$ - статическое магнитное сопротивление

Допущения:



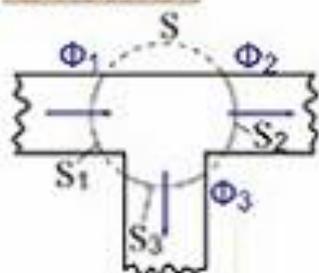
1 $\Phi_s = 0; \Phi = \Phi_0 = \text{const};$

2 $\Phi = \int \vec{B} d\vec{S} = B \cdot S$ [$S_s \approx (1,1 \dots 1,2)S$];

3 $U_M = \int \vec{H} d\vec{l} \approx H \cdot l_{cp};$

4 На линейном участке (в зазоре)
 $R_M = \frac{U_M}{\Phi} = \frac{H}{\mu_0 H S} = \frac{l}{\mu_0 S} \quad (R_s = \frac{\delta}{\mu_0 S \delta})$

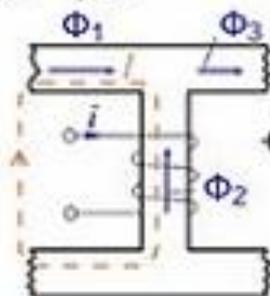
Законы:



$\oint \vec{B} d\vec{S} = 0$

$\Phi_1 = \Phi_2 + \Phi_3$

В узле:
 $\sum \Phi_k = 0$



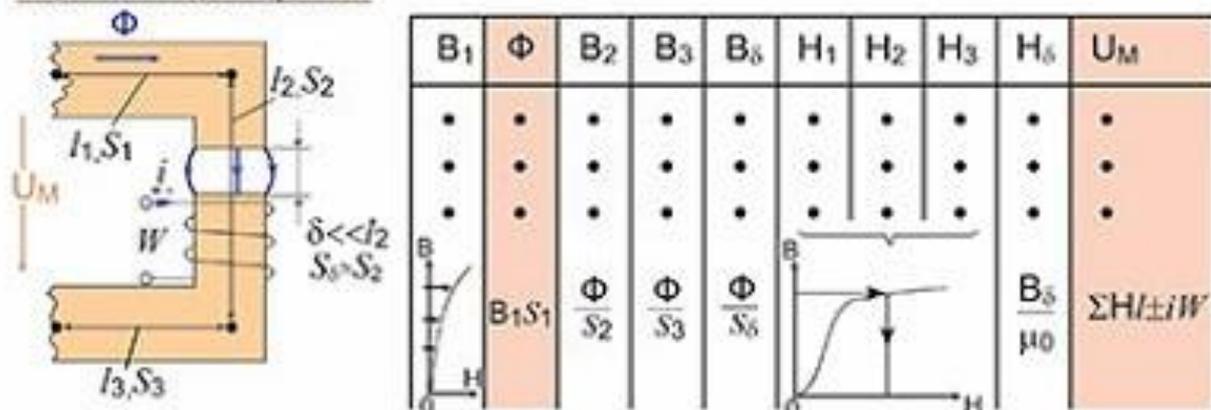
$\oint \vec{H} d\vec{l} = \sum iW$

$+H_1 l_1 - H_2 l_2 \pm \dots = \sum \pm i_k W_k$

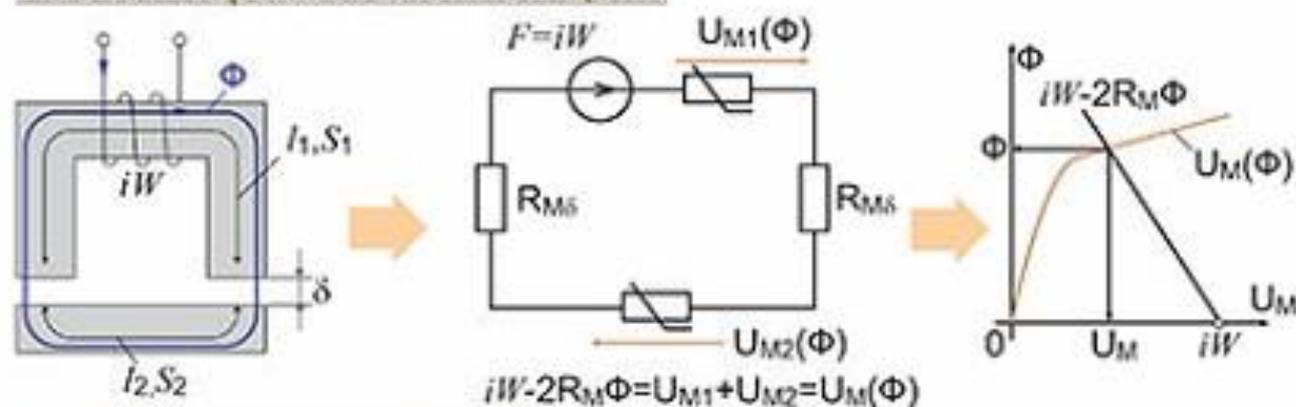
В контуре:
 $\sum U_{Mk} = \sum F_k$

10.5 Расчеты магнитных цепей

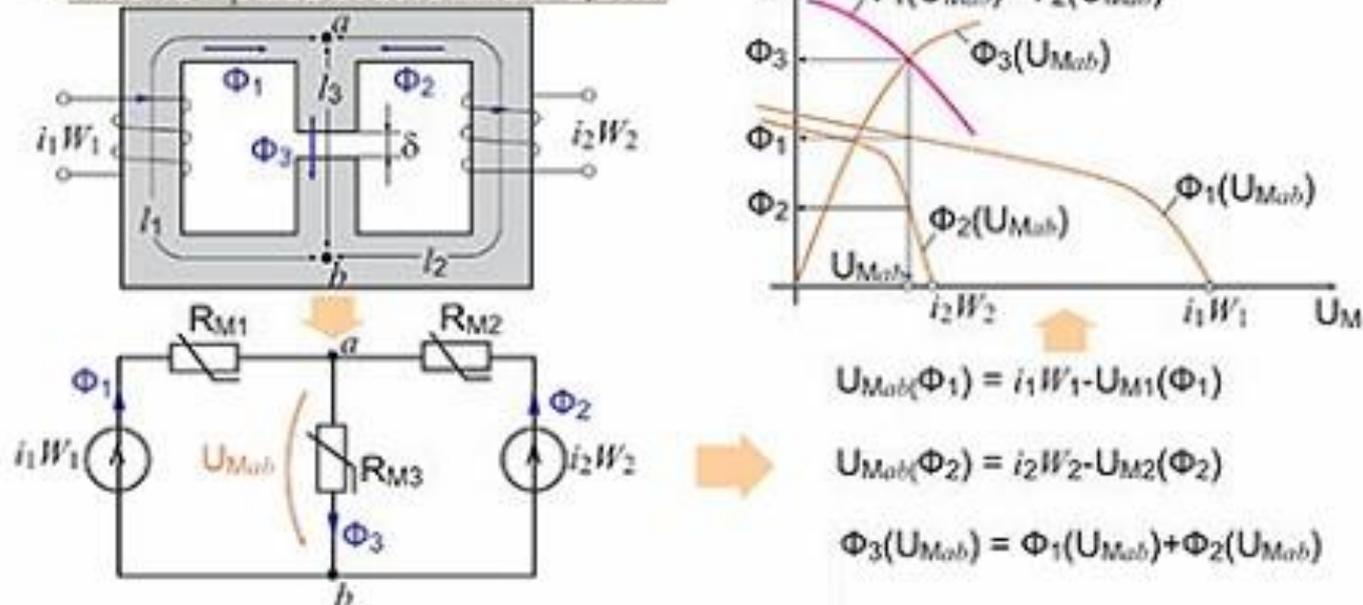
- Построение $\Phi(U_M)$ для неразветвленного участка магнитной цепи:



- Расчет неразветвленной цепи



- Расчет разветвленной цепи



11.1 Характеристики нелинейных элементов при переменных токах и напряжениях

Типы применяемых элементов

Резистивные
безинерционные



инерционные

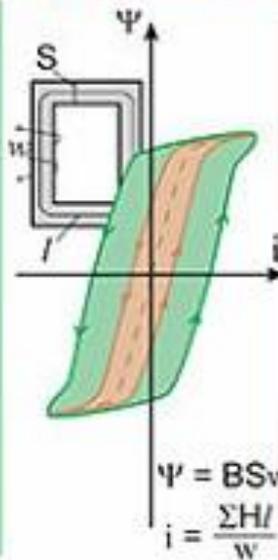
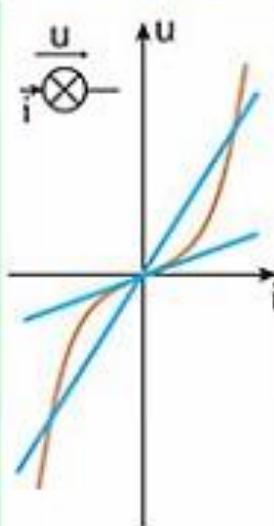
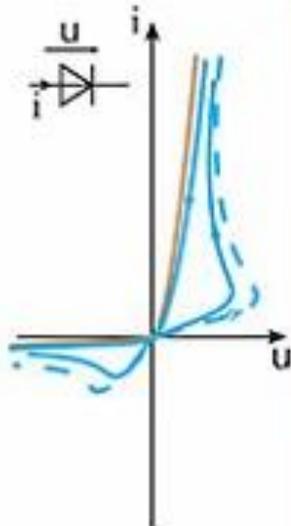
Индуктивные



Емкостные

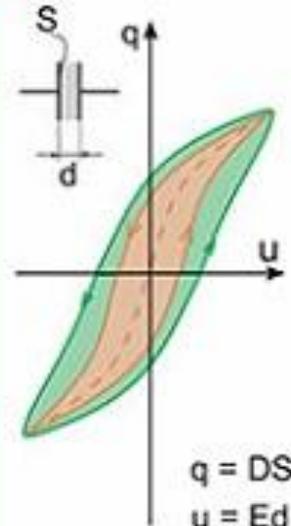


Характеристики для мгновенных значений - статические, - динамические



$$\Psi = BS_w$$

$$i = \frac{\sum Hl}{w}$$



$$q = DS$$

$$u = Ed$$

Характеристики для действующих значений

$U(I)$
не совпадает с $u(i)$, так как форма сигнала $u(t)$ не совпадает с $i(t)$

$U(I)$
совпадает со статической характеристикой $u(i)$.

При $U_m, I_m = \text{const.}$

$$R_{\text{дин}} = \frac{U}{I} = \text{const.}$$

$$R_{\text{дин}} = f(U_m, I_m)$$

$$\Psi = \Psi_m \sin \omega t$$

$$u = \omega \Psi_m \cos \omega t$$

$$U_m = 2\pi f B_m S w$$

$$U_m = 4,44 f B_m S w$$

$$I = \frac{\sum H_m l}{w k_A}$$

$U(I)$ похожа на основную кривую $B(H)$

$$q = q_m \sin \omega t$$

$$i = \omega q_m \cos \omega t$$

$$I_m = \omega q_m$$

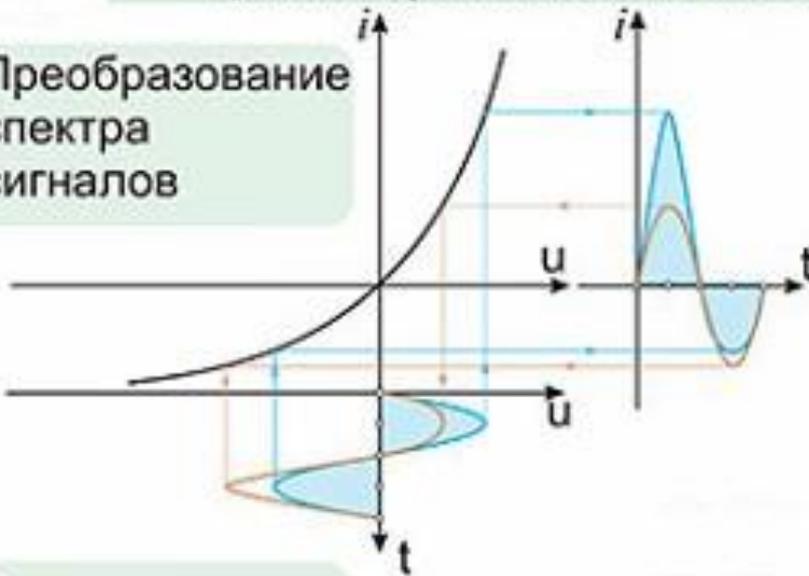
$$I = \omega q_m / \sqrt{2}$$

$$U = U_m / k_A$$

$I(U)$ похожа на основную кривую $q(u)$

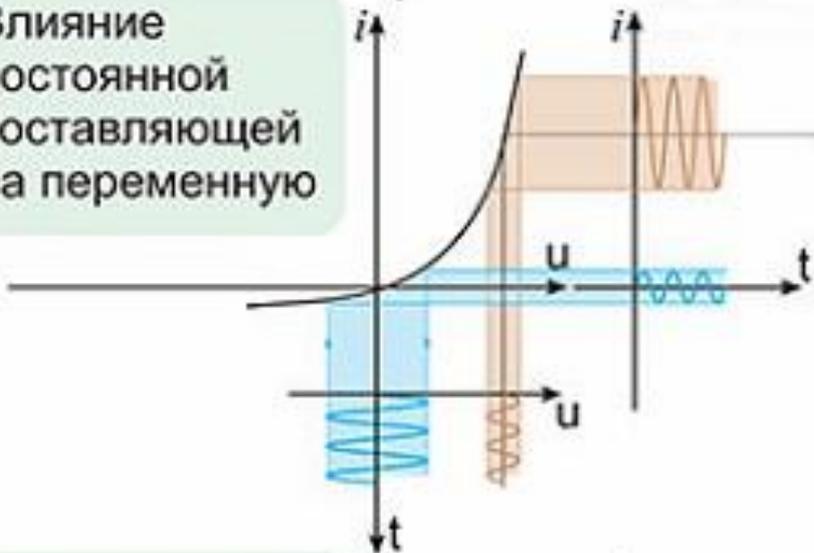
11.2 Некоторые физические явления в нелинейных цепях переменного тока и их применение

Преобразование спектра сигналов

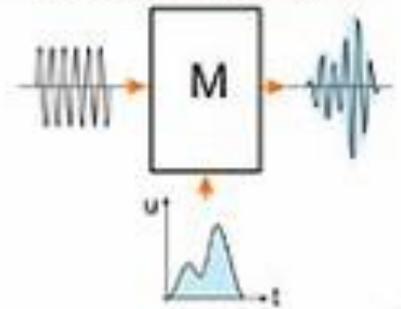


- выпрямители;
- умножители частоты;
- стабилизаторы;
- ограничители;
- формирователи сигналов;
-

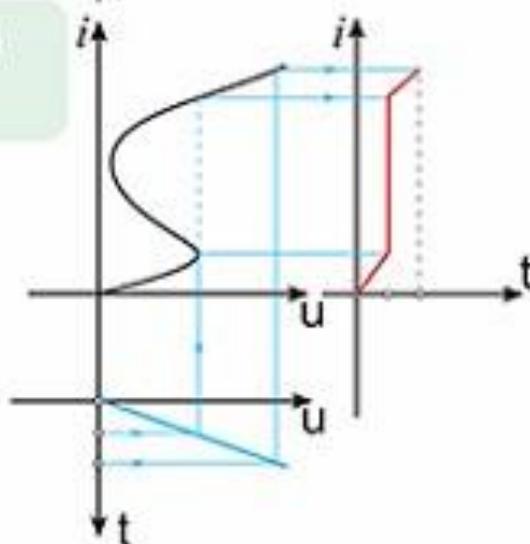
Влияние постоянной составляющей на переменную



- усилители;
- регуляторы;
- модуляторы;
-



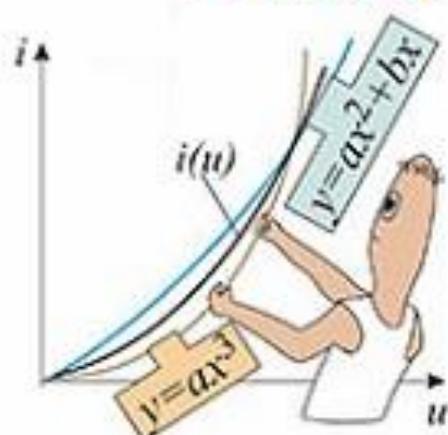
Триггерный эффект



- бесконтактные ключи, реле;
- инверторы;
- запоминающие устройства;
- формирователи импульсов;
-

11.3. Аппроксимация характеристик нелинейных элементов

А. Аппроксимация аналитической функцией



Часто используемые аппроксимирующие функции

$$y = a e^{bx} + C$$

$$y = a e^{bx} - 1$$

$$y = a \operatorname{sh} bx$$

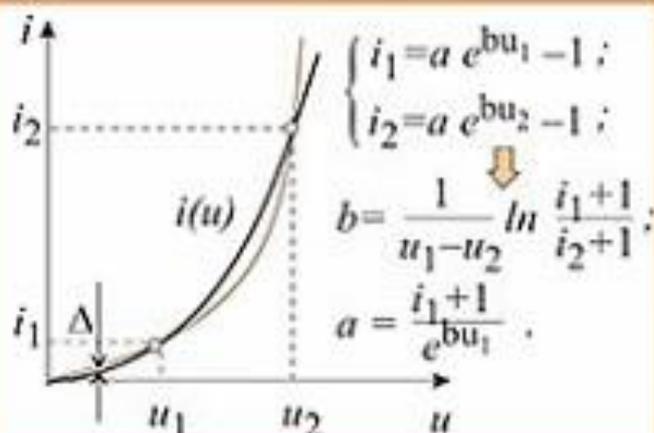
$$y = a x^b$$

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots$$

Способы определения коэффициентов аппроксимирующей функции

1. Метод выбранных точек

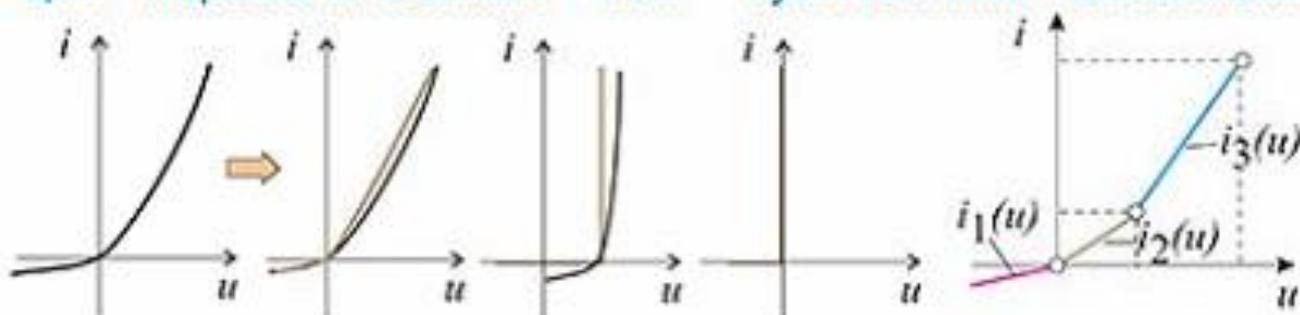
2. Метод наименьших квадратов



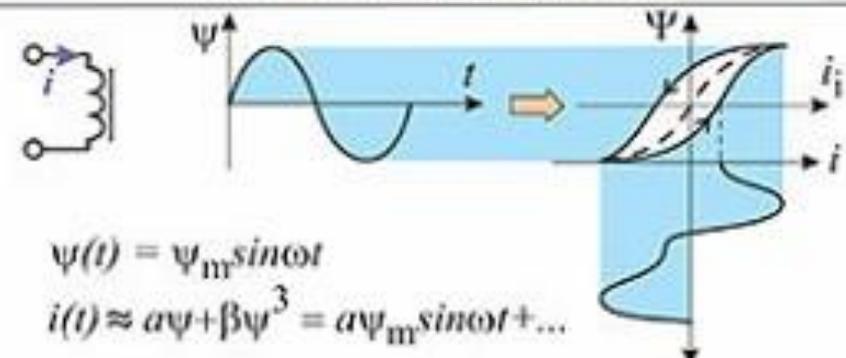
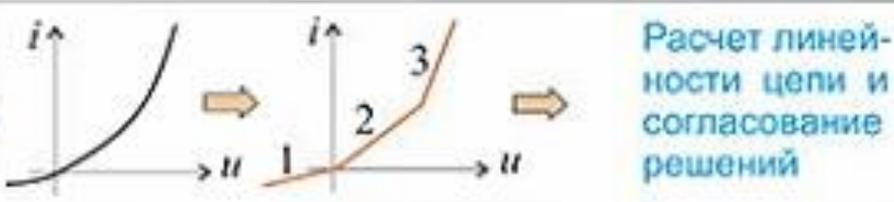
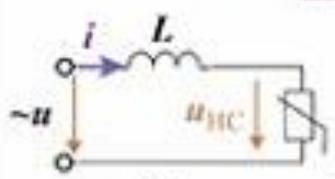
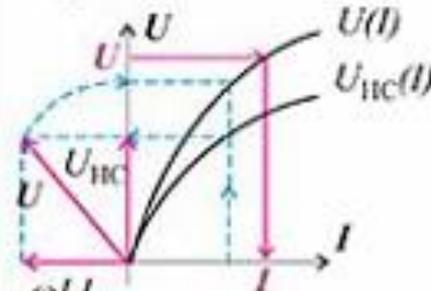
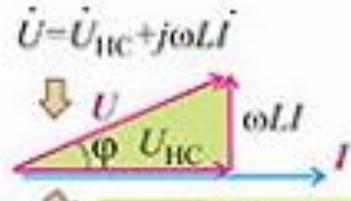
Обеспечивает минимум среднеквадратичного отклонения аппроксимирующей функции от заданной в произвольном числе точек

$$\xi = \sum_{i=1}^m \Delta_i^2 = \min$$

Б. Кусочно-линейная и кусочно-аналитическая аппроксимации параболическими или кубическими сплайнами

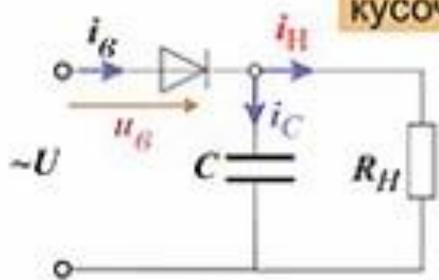


11.4. Основные методы расчета

Метод	Основные этапы расчета
<p>1. Графический или аналитический по характеристикам для мгновенных значений</p>	 <p style="text-align: center;"> $\psi(t) = \psi_m \sin \omega t$ $i(t) \approx a\psi + \beta\psi^3 = a\psi_m \sin \omega t + \dots$ </p>
<p>2. Аналитический при кусочно-линейной аппроксимации характеристики</p>	 <p style="text-align: right;">Расчет линейности цепи и согласование решений</p>
<p>3. Графический или аналитический по характеристикам для действующих значений или для первых гармоник (Методы эквивалентных синусоид, малого параметра, гармонической линеаризации).</p>	<p style="text-align: center;">— Графический вариант —</p> <div style="display: flex; justify-content: space-between;"> <div style="width: 45%;">  </div> <div style="width: 45%;"> <p style="text-align: center;"> $u = U_m \sin(\omega t + \varphi)$ $i \approx I_m \sin \omega t$ </p> <div style="border: 1px solid black; border-radius: 10px; padding: 5px; background-color: #e0f0e0; width: fit-content; margin-left: auto;"> $I_m = ?$ $U_{НСm} = ?$ $\varphi = ?$ </div> </div> </div> <div style="display: flex; justify-content: space-around; margin-top: 10px;"> <div style="width: 45%;">  </div> <div style="width: 45%;"> <p style="text-align: center;"> $\dot{U} = \dot{U}_{НС} + j\omega LI$ </p>  <div style="border: 1px solid black; border-radius: 10px; padding: 5px; background-color: #e0f0e0; width: fit-content; margin-left: auto;"> $U = \sqrt{U_{НС}^2 + (\omega LI)^2}$ </div> </div> </div> <p style="text-align: center;">— Аналитический вариант —</p> <p style="text-align: center;"> $u(t) = u_{НС}(t) + L \frac{di}{dt} \quad I_m \approx aU_{НСm} + bU_{НСm}^3$ $U_m \sin(\omega t + \varphi) = U_{НСm} \sin \omega t + \omega LI_m \cos \omega t$ $U_m (\cos \varphi \sin \omega t + \sin \varphi \cos \omega t) = U_{НСm} \sin \omega t + \omega L (aU_{НСm} + bU_{НСm}^3) \cos \omega t$ </p> <div style="border: 1px solid black; border-radius: 10px; padding: 10px; background-color: #e0f0e0; margin-top: 10px; text-align: center;"> $\left. \begin{aligned} U_m \cos \varphi &= U_{НСm} \\ U_m \sin \varphi &= \omega L (aU_{НСm} + bU_{НСm}^3) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} U_{НСm} \\ \varphi \end{aligned} \right.$ </div>

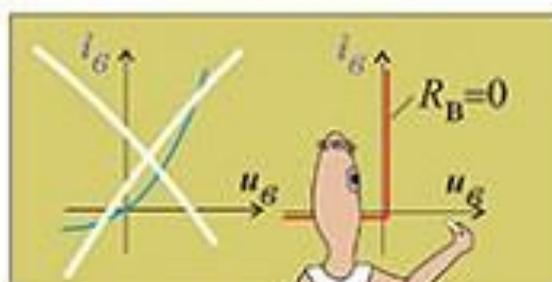
Несинусоидальные кривые заменяются эквивалентными по действующим значениям синусоидами или первыми гармониками.

11.5. Пример применения метода кусочно-линейной аппроксимации

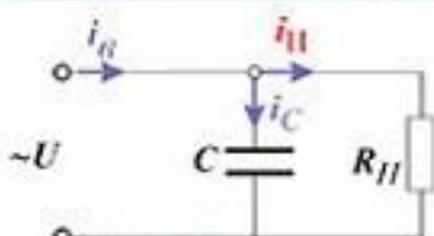
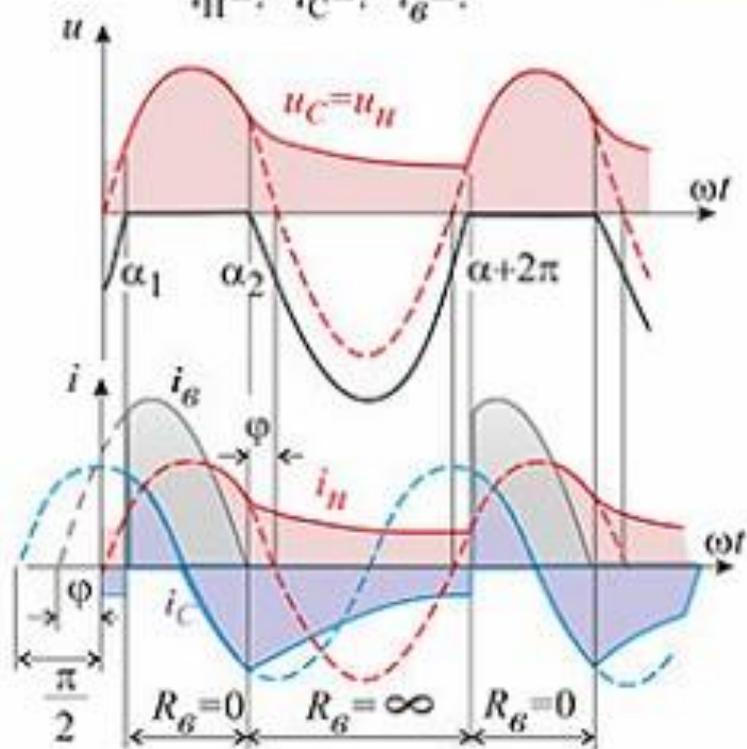


$$u = U_m \sin \omega t$$

$$i_H = ? \quad i_C = ? \quad i_G = ?$$



1 $\alpha_1 < \omega t < \alpha_2 ; R_B = 0$



$$i_H = \frac{U_H}{R_H} = \frac{U_m}{R_H} \sin \omega t$$

$$i_C = \omega C U_m \sin(\omega t + \varphi)$$

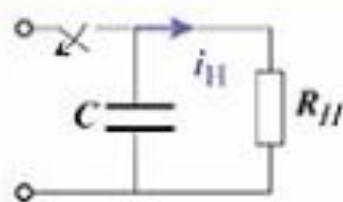
$$i_G = i_H + i_C = U_m Y \sin(\omega t + \varphi)$$

$$\text{где } Y = \sqrt{\frac{1}{R_H^2} + \omega^2 C^2}$$

$$\varphi = \arctg \omega R_H C$$

При $\omega t = \alpha_2$ $i_G = 0$, т.е. $\alpha_2 = \pi - \varphi = \pi - \arctg \omega R_H C$.

2 $\alpha_2 < \omega t < \alpha_1 + 2\pi; R_B = \infty$



$$u_C = A e^{-\frac{t}{R_H C}} ;$$

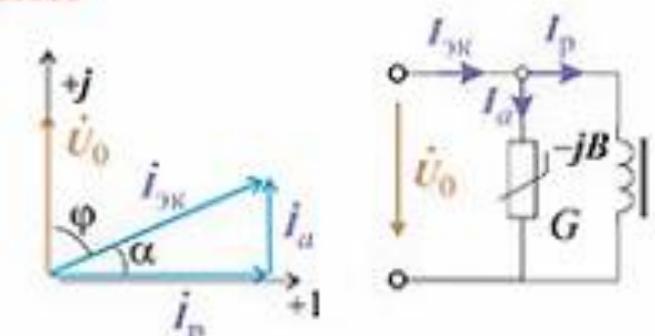
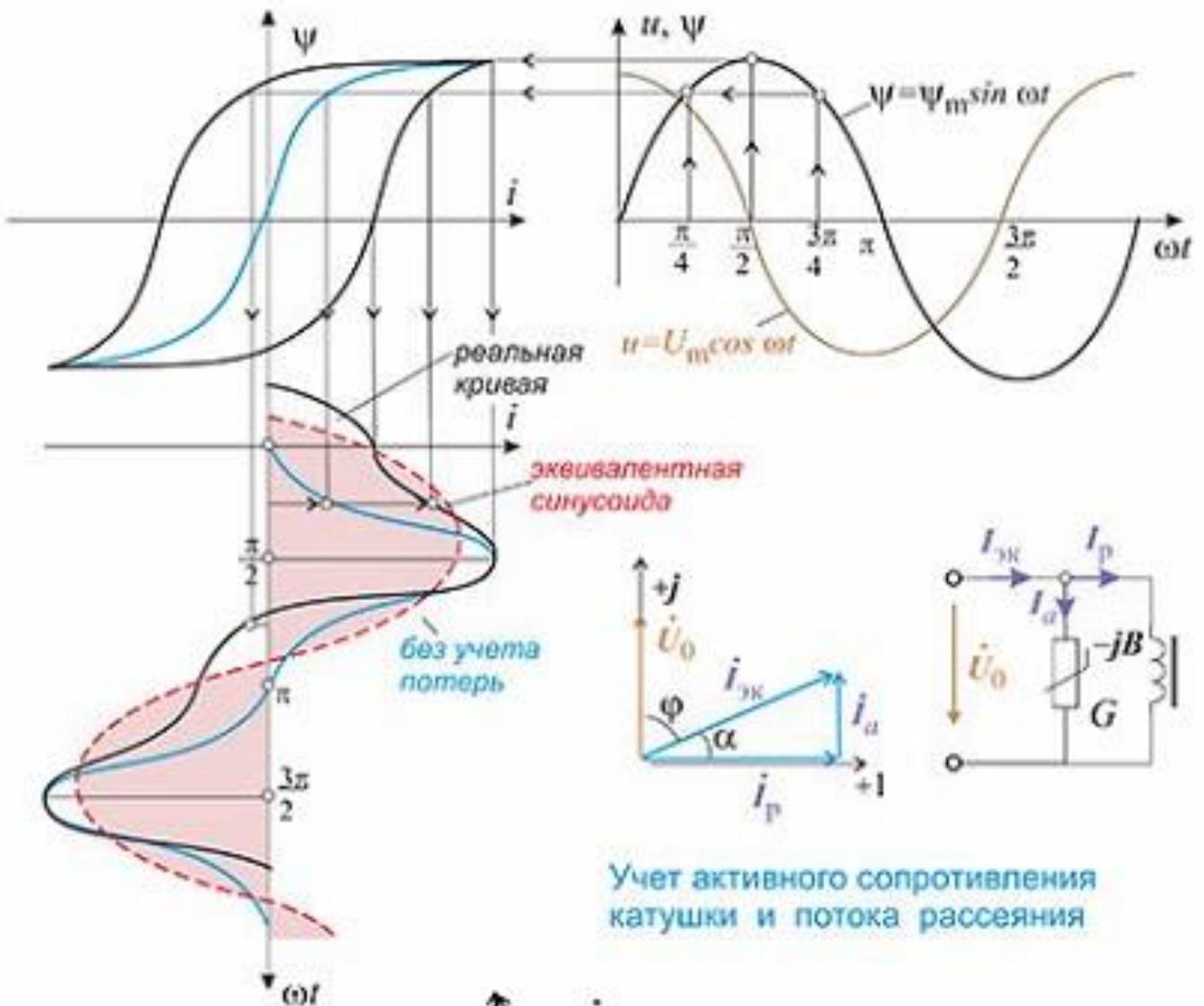
$$i_H = -\frac{U_C}{R_H} .$$

При $\omega t = \alpha_2$ $u_C = U_m \sin \alpha_2$,

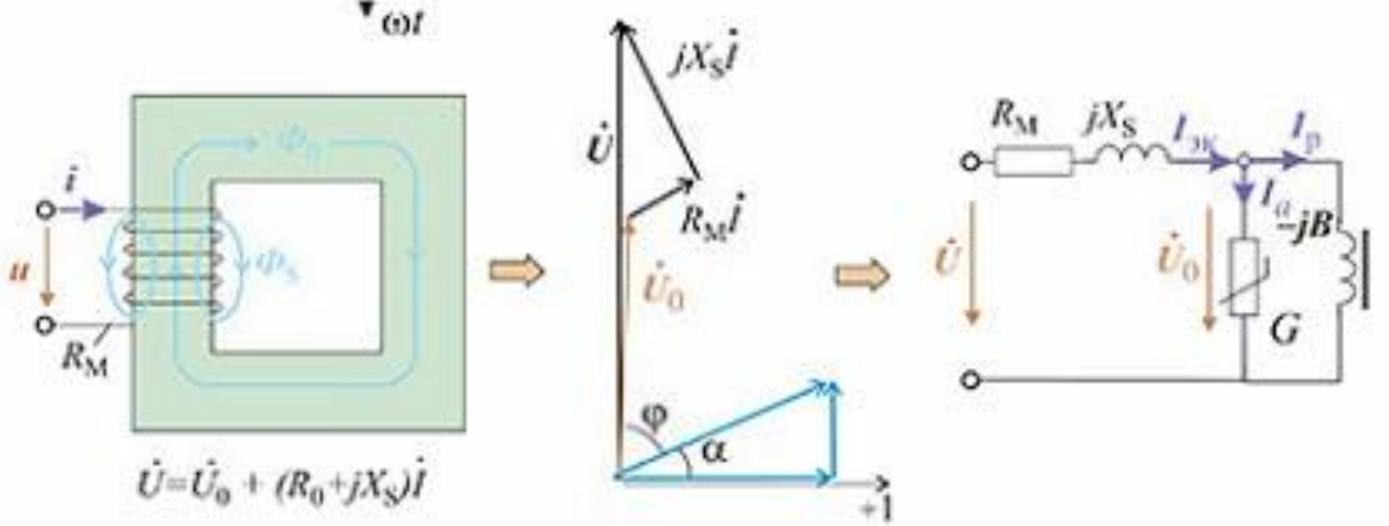
т.е. $U_m \sin \alpha_2 = A e^{-\frac{\alpha_2}{\omega R_H C}}$. Отсюда $A = U_m e^{\frac{\alpha_2}{\omega R_H C}} \sin \alpha_2$

При $\omega t = \alpha_1 + 2\pi$: $U_m \sin \alpha_1 = U_m e^{\frac{\alpha_2 - \alpha_1 - 2\pi}{\omega R_H C}} \sin \alpha_2 \Rightarrow$ определяется α_1

11.6. Схема замещения и векторная диаграмма катушки с ферромагнитным сердечником



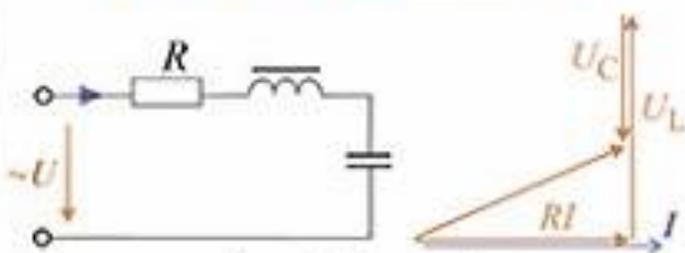
Учет активного сопротивления катушки и потока рассеяния



11.7. Феррорезонанс



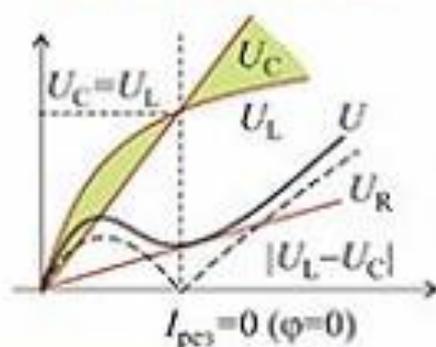
Резонанс напряжений



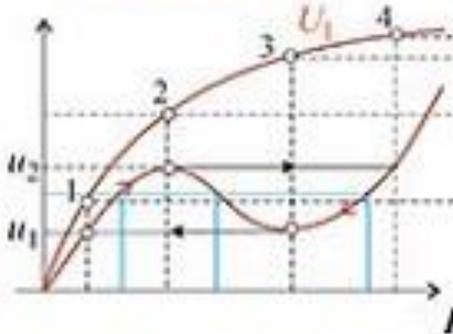
$$\dot{U} = RI + \dot{U}_L - jx_C \dot{I}$$

$$\sqrt{U} = \sqrt{(RI)^2 + (U_L - x_C I)^2}$$

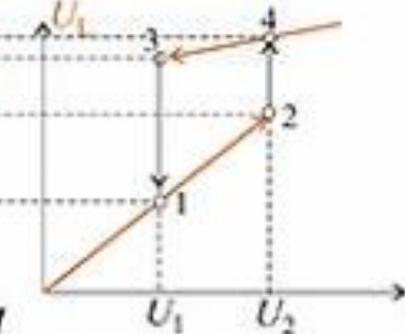
В-А характеристики



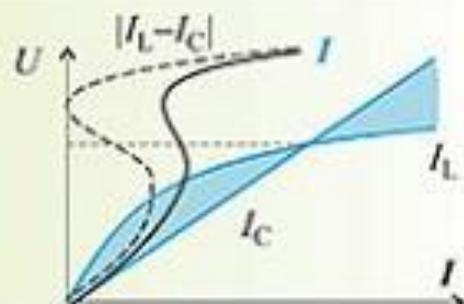
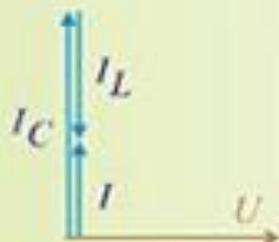
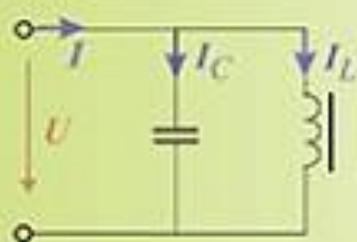
Скачки тока



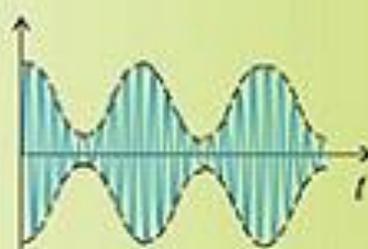
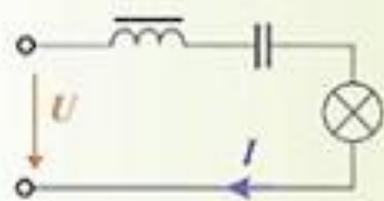
Стабилизация U



Резонанс токов

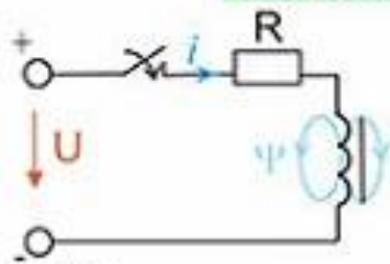


Автомодуляция



12. Переходные процессы в нелинейных цепях

12.1 Метод условной линеаризации

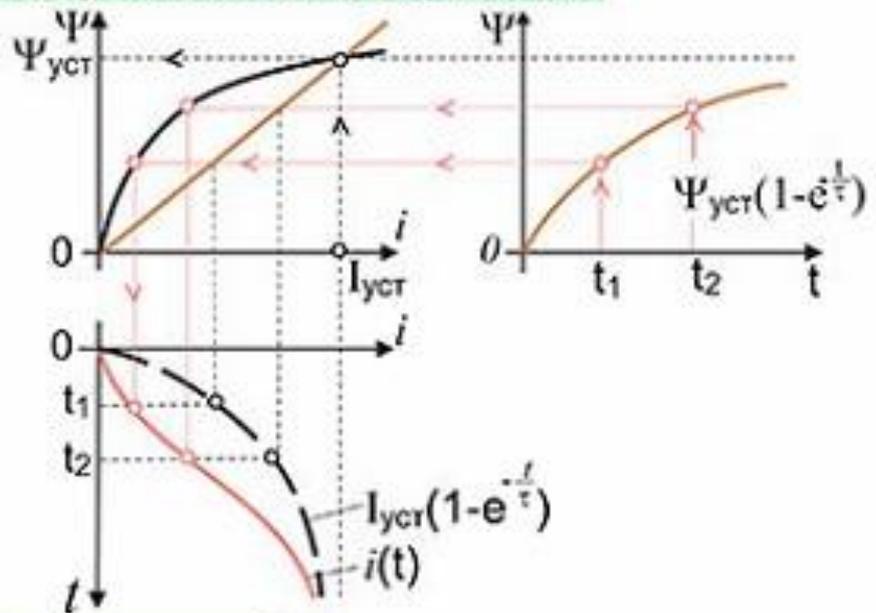


$$\frac{d\Psi}{dt} + Ri = U$$

$$I_{уст} = U/R$$

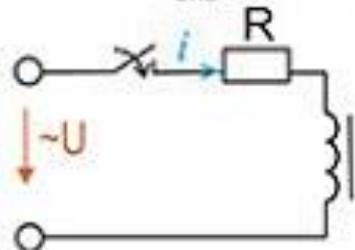
$$L_{экр} \approx \Psi_{уст}/I_{уст}$$

$$i \approx \Psi/L_{экр}$$



$$\frac{d\Psi}{dt} + \frac{R}{L_{экр}} \Psi = U;$$

$$\Psi = \Psi_{уст}(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}), \text{ где } \tau = \frac{L_{экр}}{R}.$$



$$u = U_m \sin \omega t;$$

$$Ri + \frac{d\Psi}{dt} = u; Ri \ll \frac{d\Psi}{dt}$$

$$\Psi_{пр} \approx \int u dt = -\Psi_m \cos \omega t;$$

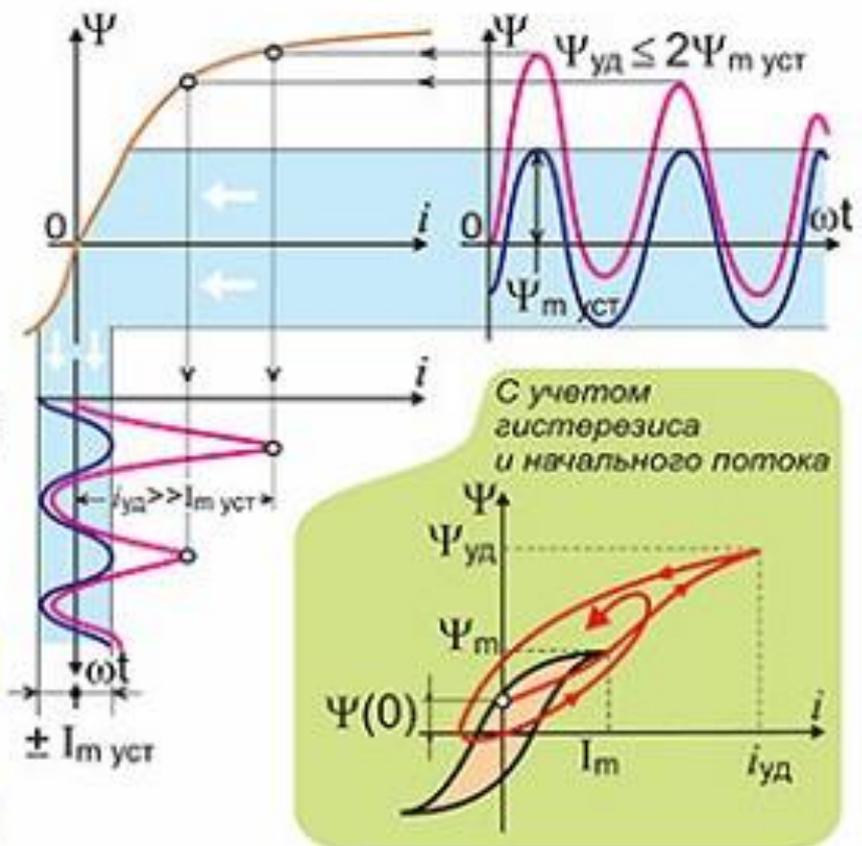
$$\Psi_{св} = Ae^{-\frac{t}{\tau}};$$

$$\text{где } \tau = \frac{L_{экр}}{R}, L_{экр} \sim \frac{\Psi_m}{I_m}$$

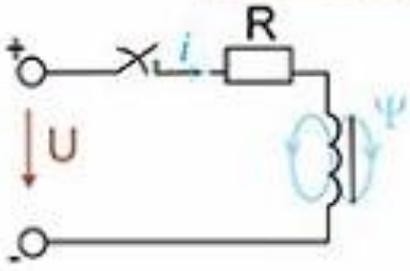
$$\Psi = -\Psi_m \cos \omega t + Ae^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$\text{При } t = 0: \Psi(0) = 0,$$

$$0 = -\Psi_m + A, A = \Psi_m$$



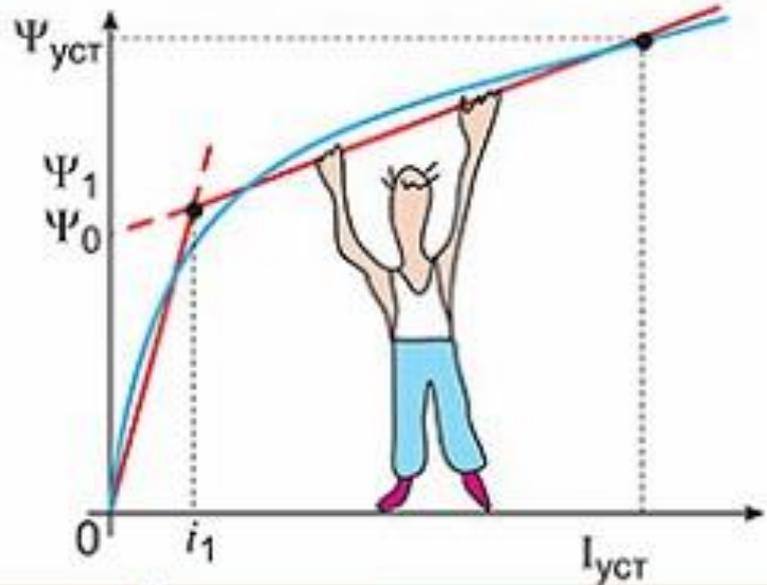
12.2 Метод кусочно - линейной аппроксимации



$$i(0)=0; \quad \Psi(0)=0;$$

$$I_{np} = \frac{U}{R}$$

$$\frac{d\Psi}{dt} + Ri = U$$



$$t = 0 \dots t_1:$$

$$i = 0 \dots i_1; \quad \Psi = 0 \dots \Psi_1;$$

$$\Psi = L_1 i, \text{ где } L_1 = \frac{\Psi_1}{i_1}$$

$$L_1 \frac{di}{dt} + Ri = U$$

$$i = I_{уст} \left(1 - e^{-\frac{R}{L_1} t} \right)$$

$$\text{При } t = t_1: \quad i_1 = I_{np} - I_{np} e^{-\frac{R}{L_1} t_1}$$

$$t_1 = -\frac{L_1}{R_1} \ln \frac{I_{np} - i_1}{I_{np}}$$

$$t = t_1 \dots \infty:$$

$$i = i_1 \dots I_{уст}; \quad \Psi = \Psi_1 \dots \Psi_{уст}$$

$$\Psi = \Psi_0 + L_2 i, \text{ где } L_2 = \frac{\Psi_{уст} - \Psi_0}{I_{уст}}$$

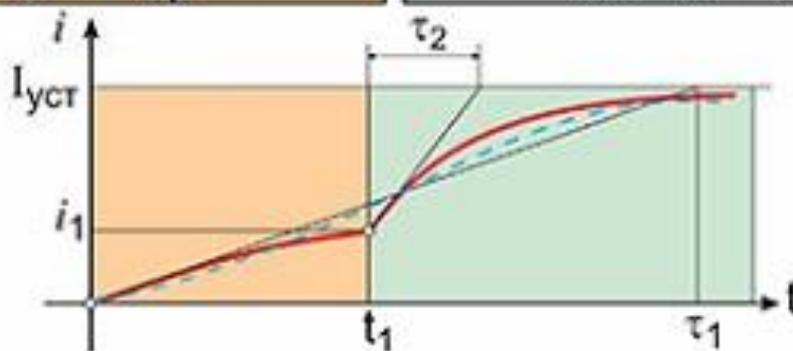
$$L_2 \frac{di}{dt} + Ri = U$$

$$i = I_{np} + A_2 e^{-\frac{R}{L_2} (t-t_1)}$$

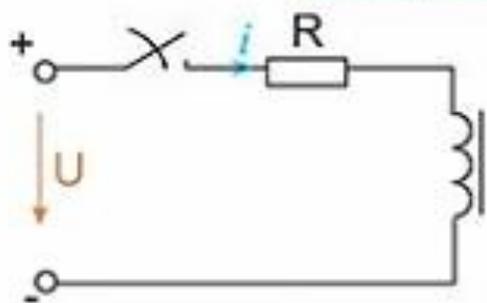
$$\text{При } t = t_1: \quad i_1 = I_{уст} + A_2$$

$$A_2 = i_1 - I_{уст}$$

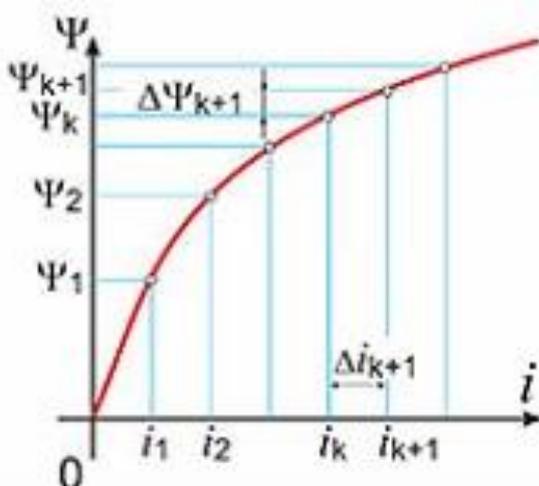
$$i = I_{уст} + (i_1 - I_{уст}) e^{-\frac{R}{L_2} (t-t_1)}$$



12.3 Метод последовательных интервалов

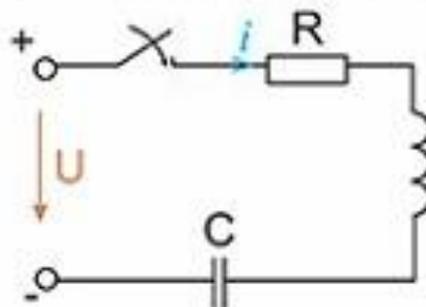
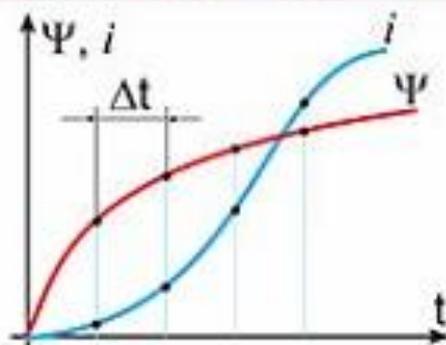


$$\frac{d\Psi}{dt} + Ri = U$$



$$\frac{\Delta\Psi}{\Delta t} = U - Ri_{k-1}; \quad \Delta\Psi_k \approx (U - Ri_{k-1})\Delta t; \quad \Psi_k = \Psi_{k-1} + \Delta\Psi_k$$

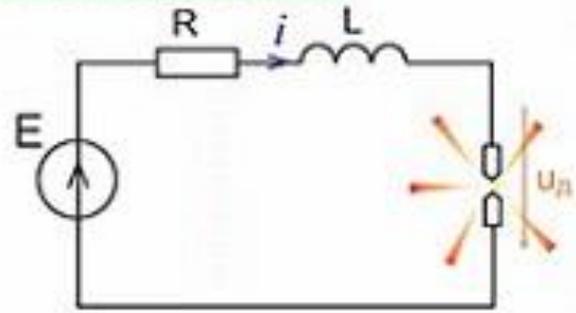
k	t	Ψ_k	i_k	$\Delta\Psi_{k+1}$
0	0	0	0	$U\Delta t$
1	Δt	$\Delta\Psi_1$	i_1	$(U - Ri_1)\Delta t$
2	$2\Delta t$	$\Psi_1 + \Delta\Psi_2$	i_2	$(U - Ri_2)\Delta t$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮



$$\begin{cases} \frac{d\Psi}{dt} + Ri + U_C = U \\ i = C \frac{dU_C}{dt} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \Delta\Psi_k = (U - Ri_k - U_{C(k-1)})\Delta t \\ \Delta U_{Ck} = \frac{1}{C} i_{k-1} \Delta t \end{cases}$$

k	t	Ψ_k	i_k	U_{Ck}	$\Delta\Psi_{k+1}$	$\Delta U_{C(k+1)}$
0	0	0	0	0	$U\Delta t$	0
1	Δt	$\Delta\Psi_1$	i_1	0	$(U - Ri_1)\Delta t$	$\frac{1}{C} i_1 \Delta t$
2	$2\Delta t$	$\Psi_1 + \Delta\Psi_2$	i_2	U_{C2}	$(U - Ri_2 - U_{C2})\Delta t$	$\frac{1}{C} i_2 \Delta t$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

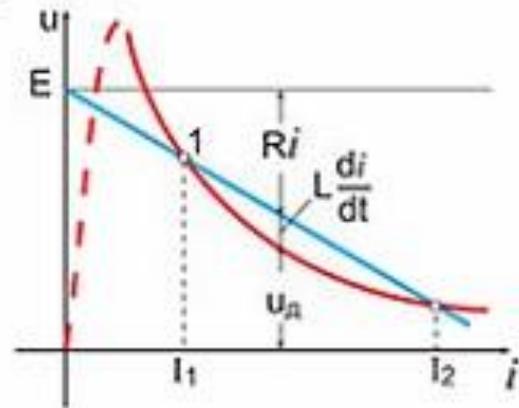
12.4 Понятие об устойчивости режима в нелинейных цепях



$$Ri + L \frac{di}{dt} + u_d = E$$

В точках равновесия 1 и 2:

$$L \frac{di}{dt} = 0; \quad i = \text{const}$$



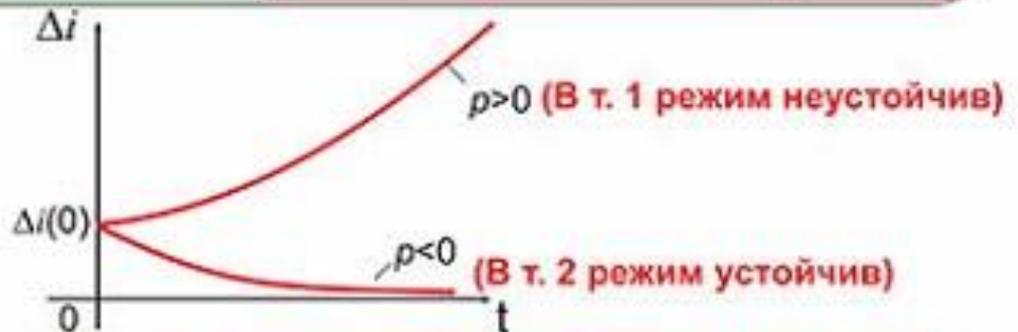
При $t=0$ $i := i + \Delta i(0)$

При $t > 0$: $R(i + \Delta i) + L \frac{d}{dt}(i + \Delta i) + u_d + \Delta u_d = E$,

где $\Delta u_d \cong R_{\text{дин}} \Delta i$, $R_{\text{дин}} < 0$. В т. 1 $|R_{\text{дин}}| > R$, в т. 2 $|R_{\text{дин}}| < R$

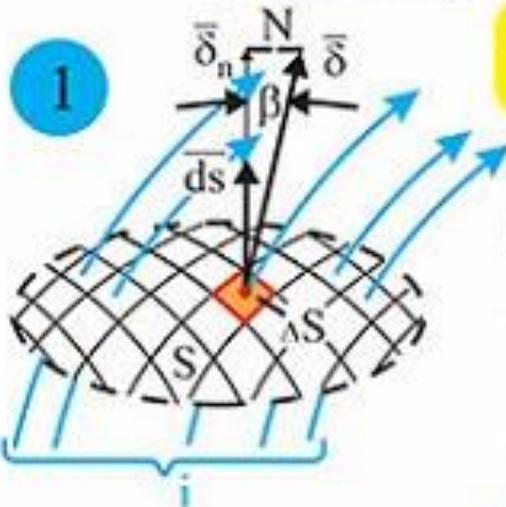
$$R \Delta i + L \frac{d \Delta i}{dt} + R_{\text{дин}} \Delta i + \Delta u_d = 0$$

$$\Delta i = \Delta i(0) e^{\rho t}, \quad \text{где } \rho = - \frac{R + R_{\text{дин}}}{L}$$



При положительных корнях или вещественных частях корней - режим неустойчив

13. Теория электромагнитного поля



13.1 Уравнения Максвелла в дифференциальной форме

$$\oint \bar{H} d\bar{l} = i \quad \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\oint \bar{H} d\bar{l}}{\Delta S} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta i}{\Delta S}$$

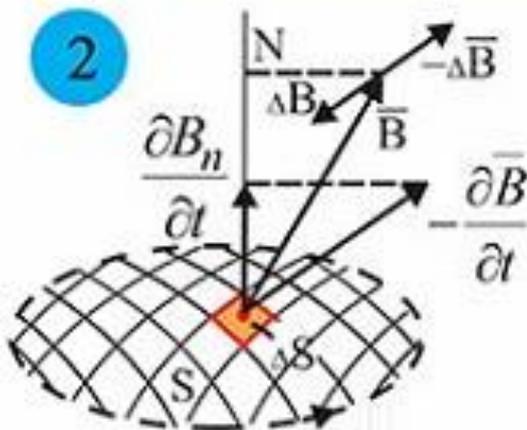
$$\text{rot}_n \bar{H} = \delta \cos \beta = \delta_n \quad \text{rot} \bar{H} = \bar{\delta}$$

В декартовой системе координат

$$\sum \bar{H} d\bar{l} = H_y dy + (H_z + \frac{\partial H_z}{\partial y} dy) dz - (H_y + \frac{\partial H_y}{\partial z} dz) dy - H_z dz = (\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z}) \cdot dy \cdot dz$$

$$\text{rot}_x \bar{H} = \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z}$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = \delta_x; \quad \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} = \delta_y; \quad \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = \delta_z$$

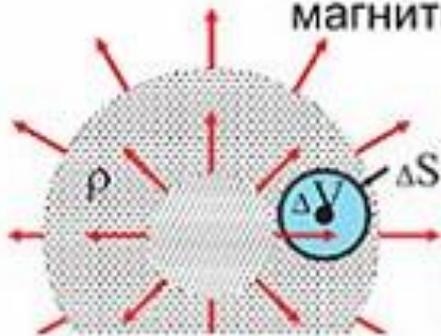


$$\oint \bar{E} d\bar{l} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

$$\lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\oint \bar{E} d\bar{l}}{\Delta S} = -\frac{d}{dt} \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta \Phi}{\Delta S} \right)$$

$$\text{rot}_n \bar{E} = -\frac{\partial B_n}{\partial t} \quad \text{rot} \bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t}$$

13.2 Постулат Максвелла и принцип непрерывности магнитного поля в дифференциальной форме



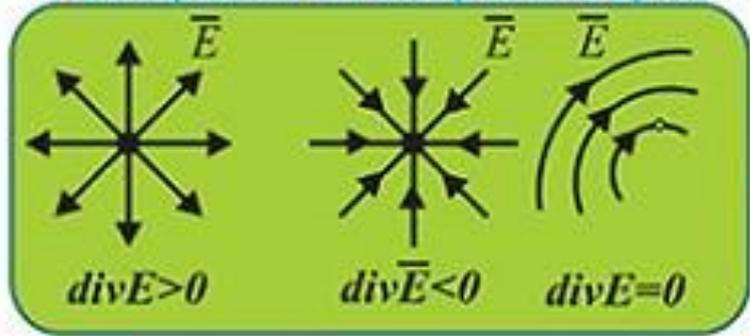
$$\oint_{\Delta S} \bar{D} dS = \Delta q$$

$$\lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oint \bar{D} dS}{\Delta V} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta V}$$

$$\text{div} \bar{D} = \rho$$

\bar{D} (или \bar{E})

В однородной и изотропной среде :



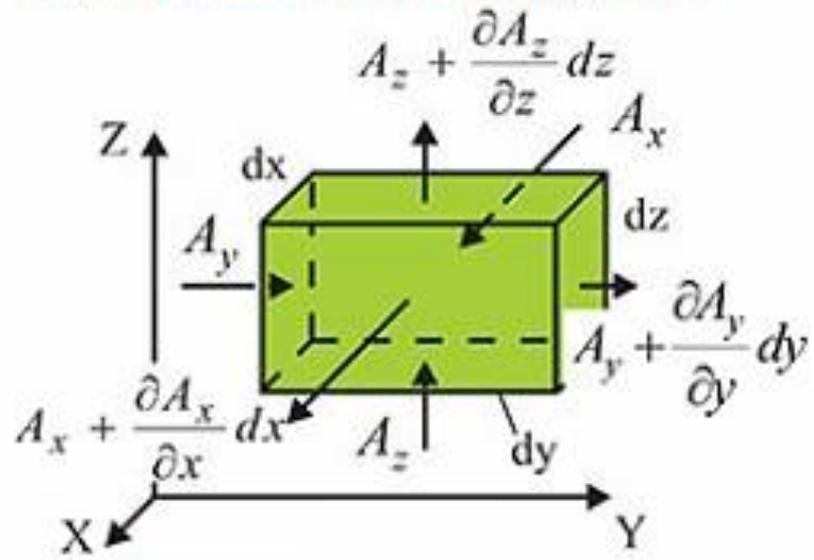
$$\bar{D} = \epsilon_a \bar{E} \quad \text{и} \quad \text{div} \bar{E} = \rho / \epsilon_a$$

Аналогично:

$$\oint_S \bar{B} dS = 0$$

$$\text{div} \bar{B} = 0$$

В декартовой системе координат :

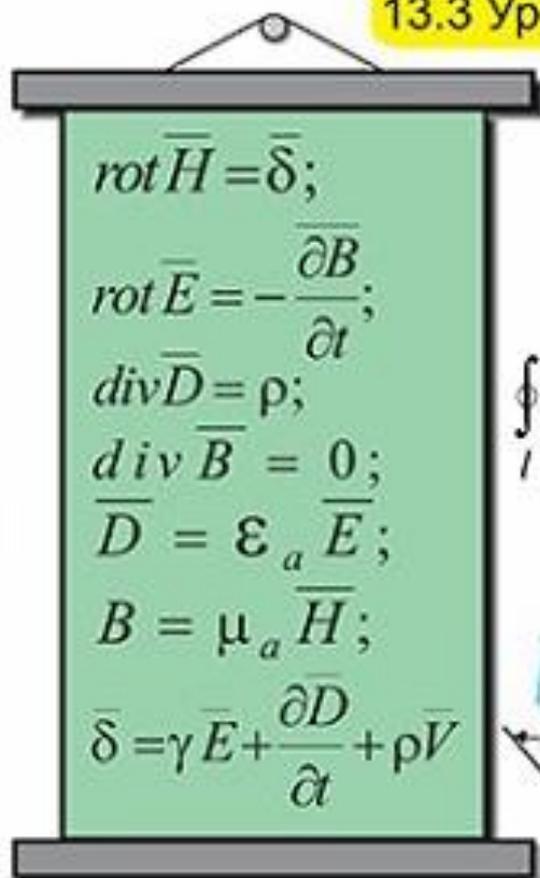


$$\begin{aligned} \oint_{\Delta S} \bar{A} dS &= -A_x dydz + (A_x + \frac{\partial A_x}{\partial x} dx) dydz - A_y dx dz + \\ &+ (A_y + \frac{\partial A_y}{\partial y} dy) dx dz - A_z dx dy + \\ &+ (A_z + \frac{\partial A_z}{\partial z} dz) dx dy = \\ &= (\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}) dx dy dz \end{aligned}$$

$$\text{div} \bar{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z};$$

$$\text{div} \bar{A} = \nabla \bar{A}, \quad \text{где} \quad \nabla = i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} + k \frac{\partial}{\partial z}$$

13.3 Уравнения электростатического поля

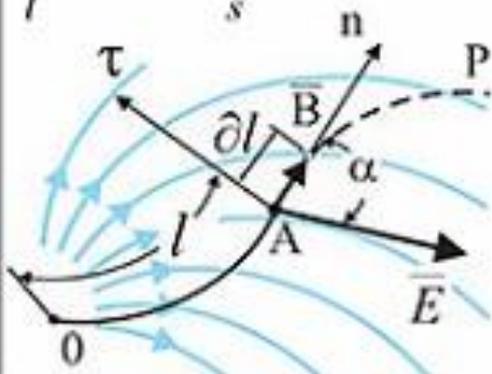


$$\bar{\delta} = 0; \quad \bar{H} = 0; \quad \bar{B} = 0;$$

$$\text{rot } \bar{E} = 0; \quad \text{div } \bar{D} = \bar{\rho}; \quad \bar{D} = \epsilon_a \bar{E}.$$

$\text{rot } \bar{E} = 0$ - безвихревое поле

$$\oint_l \bar{E} d\bar{l} = \int_s \text{rot } \bar{E} ds = 0 \quad \text{- потенциальное поле}$$



$$\varphi_A = \int_A^P \bar{E} d\bar{l};$$

$$\varphi_B = \varphi_A - \int_A^B \bar{E} d\bar{l};$$

$$\partial\varphi = -\bar{E} d\bar{l} = -E dl \cos \alpha.$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial l} = -E \cos \alpha; \quad \frac{\partial\varphi}{\partial \tau} = 0 \quad (\text{т.е. } \varphi = \text{const}); \quad \frac{\partial\varphi}{\partial n} = -\bar{E} = \text{grad } \varphi$$

$$\text{div } \bar{E} = \frac{\rho}{\epsilon_a} \quad \text{div}(\text{grad } \varphi) = -\frac{\rho}{\epsilon_a} \quad \text{- уравнение Пуассона}$$

Если $\rho = 0$, то $\text{div}(\text{grad } \varphi) = 0$ - уравнение Лапласа

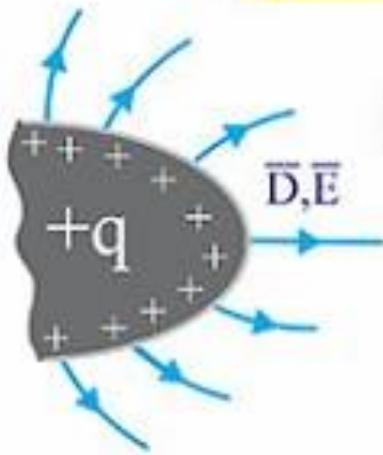
$$\text{grad } \varphi = \nabla \varphi, \quad \text{div}(\text{grad } \varphi) = \nabla(\nabla \varphi) = \nabla^2 \varphi = \Delta \varphi$$

$$\nabla^2 \varphi = -\rho / \epsilon_a; \quad \nabla^2 \varphi = 0 \quad \text{или} \quad \nabla \varphi = -\rho / \epsilon_a; \quad \nabla \varphi = 0$$

В декартовой системе координат

$$\nabla \varphi = i \frac{\partial \varphi}{\partial x} + j \frac{\partial \varphi}{\partial y} + k \frac{\partial \varphi}{\partial z}; \quad \nabla^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2};$$

13.4 Граничные условия в электростатическом поле



Внутри проводника:

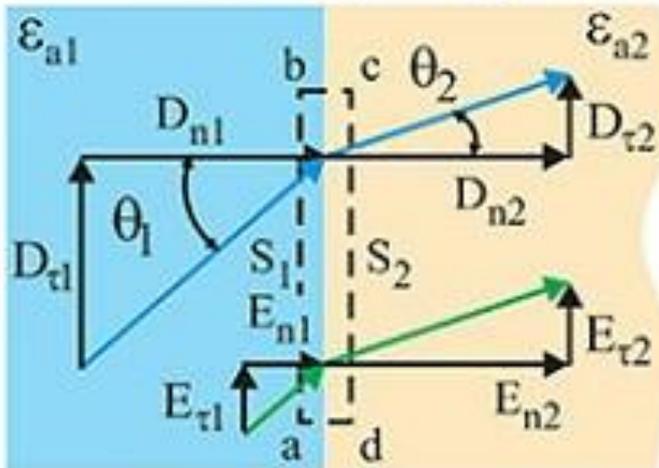
$$\bar{\delta} = \gamma \bar{E} = 0 \Rightarrow \bar{E} = 0 \Rightarrow \text{grad} \varphi = 0 \Rightarrow \varphi = \text{const}$$

На наружной поверхности проводника:

$$\varphi = \text{const}; E_{\tau} = 0; E = E_n = -\partial \varphi / \partial n$$

$$D = \epsilon_a E - \epsilon_a \frac{\partial \varphi}{\partial n} = \sigma \quad (\sigma - \text{плотность заряда})$$

На границе раздела двух диэлектриков:



$$\oint \bar{E} d\bar{l} = E_1 \cdot ab \cdot \sin \theta_1 - E_2 \cdot cd \cdot \sin \theta_2 = 0$$

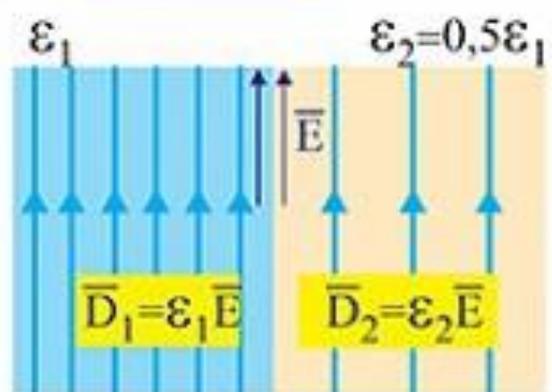
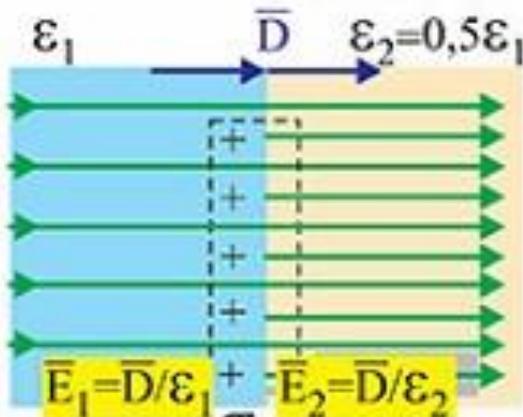
$$(bc = ad \rightarrow 0; ab = cd)$$

$$E_1 \sin \theta_1 = E_2 \sin \theta_2 \Rightarrow E_{\tau 1} = E_{\tau 2}$$

$$\oint \bar{D} d\bar{s} = -D_1 S_1 \cos \theta_1 + D_2 S_2 \cos \theta_2$$

$$D_1 \cos \theta_1 = D_2 \cos \theta_2 \Rightarrow D_{n1} = D_{n2}$$

$$\frac{E_1 \sin \theta_1}{D_1 \cos \theta_1} = \frac{E_2 \sin \theta_2}{D_2 \cos \theta_2} \Rightarrow \frac{\text{tg} \theta_1}{\text{tg} \theta_2} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}$$



$$\sigma_{\text{связ.}} = P_2 - P_1 = \epsilon_0 (E_2 - E_1)$$

13.5 Электрическое поле постоянных токов

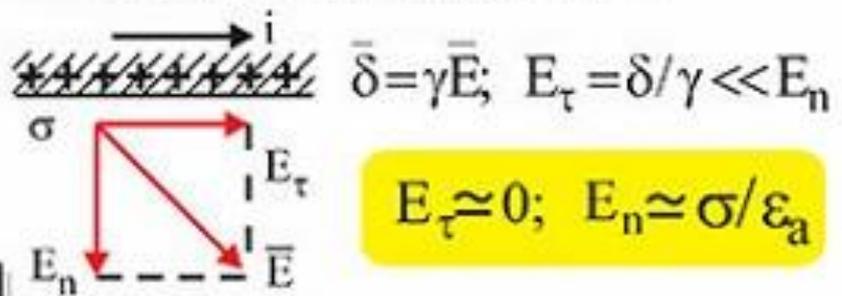
$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \bar{H} &= \bar{\delta}; \\ \operatorname{rot} \bar{E} &= -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t}; \\ \operatorname{div} \bar{D} &= \rho; \\ \operatorname{div} \bar{B} &= a; \\ \bar{D} &= \epsilon_a \bar{E}; \\ B &= \mu_a \bar{H}; \\ \bar{\delta} &= \gamma \bar{E} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} + \rho \bar{V} \end{aligned}$$

$$\bar{\delta} = \text{const}; \bar{H} = \text{const}; \bar{B} = \text{const}; \frac{\partial \bar{B}}{\partial t} = 0$$

В диэлектрике, окружающем провода с постоянными токами:

$$\operatorname{rot} \bar{E} = 0; \operatorname{div} \bar{D} = 0; \bar{D} = \epsilon_a \bar{E}$$

При $\epsilon_a = \text{const}$: $\operatorname{div}(\operatorname{grad} \phi) = 0$.

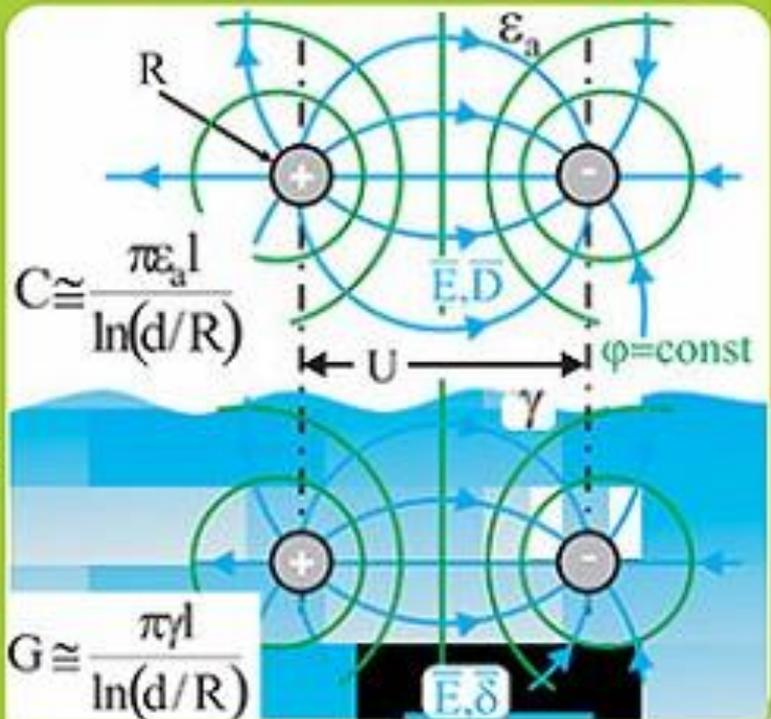


Внутри проводника с постоянным током

$$\operatorname{rot} \bar{E} = 0; \bar{\delta} = \gamma \bar{E}; \operatorname{div} \bar{\delta} = 0$$

Аналогия с электростатическим полем

\bar{D}	}	\Leftrightarrow	}	$\bar{\delta}$
ϵ_a				γ
$\bar{D} = \epsilon_a \bar{E}$				$\bar{\delta} = \gamma \bar{E}$
$q = \int_s \bar{D} ds$				$i = \int_s \bar{\delta} ds$
$U_{ab} = \int_a^b \bar{E} dl$				$U_{ab} = \int_a^b \bar{E} dl$
$C = q/U$				$G = i/U$
и т. д.				и т. д.



13.6 Магнитное поле постоянных токов. Скалярный потенциал

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \bar{H} &= \bar{\delta}; \\ \operatorname{rot} \bar{E} &= -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t}; \\ \operatorname{div} \bar{D} &= \rho; \\ \operatorname{div} \bar{B} &= 0; \\ \bar{D} &= \epsilon_a \bar{E}; \\ B &= \mu_a \bar{H}; \\ \bar{\delta} &= \gamma \bar{E} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} + \rho \bar{V} \end{aligned}$$

$$\bar{\delta} = \text{const}; \bar{H} = \text{const}; \bar{B} = \text{const}; \frac{\partial \bar{B}}{\partial t} = 0$$

$$\operatorname{rot} \bar{H} = \bar{\delta}; \operatorname{div} \bar{B} = 0; B = \mu_a \bar{H}$$

$\operatorname{rot} \bar{H} = \bar{\delta}$ - там, где $\bar{\delta} \neq 0$ - поле вихревое

Там, где $\delta = 0$ (вне проводников) - поле безвихревое, т.е. потенциальное.

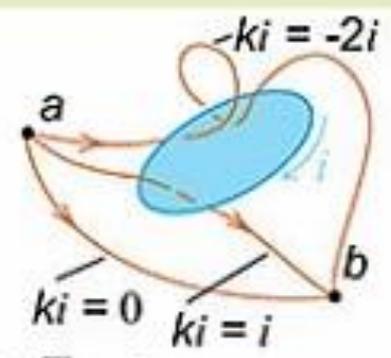
Тогда: $\bar{H} = -\operatorname{grad} \varphi_M$

$$H_x = -\frac{\partial \varphi_M}{\partial x}; \quad H_y = -\frac{\partial \varphi_M}{\partial y}; \quad H_z = -\frac{\partial \varphi_M}{\partial z}$$

В эл. статическом поле: $\varphi_a = \int_a^{\rho} \bar{E} d\bar{l}$;

В магнитном поле: $\oint \bar{H} d\bar{l} = ki$;

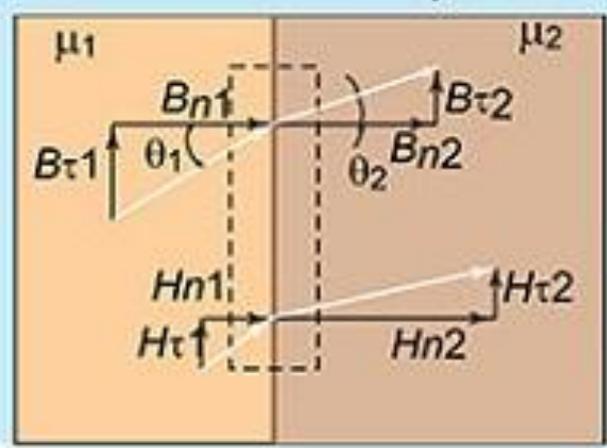
$$\varphi_{Mab} = \int_a^b \bar{H} d\bar{l} \pm ki; \quad U_{Mab} = \int_a^b \bar{H} d\bar{l} \pm ki.$$



При $\mu_a = \text{const}$: $\operatorname{div} \bar{B} = \operatorname{div} \mu_a \bar{H} = 0 \Rightarrow \operatorname{div} \bar{H} = 0$

$$\operatorname{div} (\operatorname{grad} \varphi_M) = 0$$

Граничные условия



$$\oint \bar{B} d\bar{s} = 0 \Rightarrow B_{n1} = B_{n2}$$

$$\oint \bar{H} d\bar{l} = 0 \Rightarrow H_{\tau 1} = H_{\tau 2}$$

$$\frac{\operatorname{tg} \theta_1}{\operatorname{tg} \theta_2} = \frac{\mu_{a1}}{\mu_{a2}}$$

13.7 Векторный потенциал магнитного поля

Три уравнения свести к одному?



$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \bar{H} &= \delta \\ \bar{B} &= \mu_0 \bar{H} \\ \operatorname{div} \bar{B} &= 0 \end{aligned}$$

Пусть $\bar{B} = \operatorname{rot} \bar{A}$,

\bar{A} - векторный потенциал магнитного поля

Тогда $\operatorname{div} \bar{B} = \operatorname{div} (\operatorname{rot} \bar{A}) \equiv 0$

$$\{ \operatorname{div} (\operatorname{rot} \bar{A}) = \nabla [\nabla \bar{A}]; \nabla \bar{A} \perp \nabla \cos(\widehat{\nabla \bar{A}, \nabla}) = 0 \}$$

При $\mu_0 = \text{const}$: $\operatorname{rot} \mu_0 \bar{H} = \operatorname{rot} \bar{B} = \mu_0 \delta$, тогда

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \bar{A} = \mu_0 \delta \Rightarrow [\nabla [\nabla \bar{A}]] = \mu_0 \delta$$

$$[\bar{a} [\bar{b} \bar{c}]] = \bar{b} (\bar{a} \bar{c}) - \bar{c} (\bar{a} \bar{b}) \Rightarrow [\nabla [\nabla \bar{A}]] = \nabla (\nabla \bar{A}) - \bar{A} (\nabla \nabla)$$

$\nabla (\nabla \bar{A}) = \operatorname{grad} \operatorname{div} \bar{A}$. Можно принять $\operatorname{div} \bar{A} = 0$, тогда:

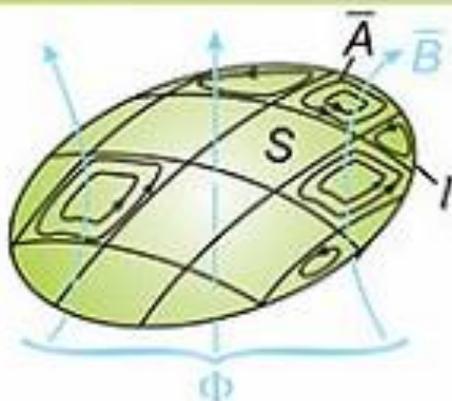
$$\nabla^2 \bar{A} = -\mu_0 \delta \quad \text{- уравнение Пуассона}$$

В декартовой системе координат:

$$\left. \begin{aligned} \bar{A} &= iA_x + jA_y + kA_z \\ \delta &= i\delta_x + j\delta_y + k\delta_z \end{aligned} \right\}$$



$$\begin{cases} \nabla^2 A_x = \delta_x \\ \nabla^2 A_y = \delta_y \\ \nabla^2 A_z = \delta_z \end{cases}$$



$$\Phi = \int_S \bar{B} \bar{d}s = \int_S \operatorname{rot} \bar{A} \bar{d}s$$

По теореме Стокса

$$\int_S \operatorname{rot} \bar{A} \bar{d}s = \oint_I \bar{A} d\bar{l}$$

$$\Phi = \oint_I \bar{A} d\bar{l}$$

13.8 Плоская электромагнитная волна в диэлектрике

$\text{rot } \vec{H} = \epsilon_a \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} ; \text{rot } \vec{E} = -\mu_a \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$

$$\begin{cases} \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = \epsilon_a \frac{\partial E_x}{\partial t} ; & \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -\mu_a \frac{\partial H_x}{\partial t} ; \\ \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} = \epsilon_a \frac{\partial E_y}{\partial t} ; & \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -\mu_a \frac{\partial H_y}{\partial t} ; \\ \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = \epsilon_a \frac{\partial E_z}{\partial t} ; & \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -\mu_a \frac{\partial H_z}{\partial t} ; \end{cases}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = 0; \frac{\partial}{\partial y} = 0; \frac{\partial E_z}{\partial t} = 0 \Rightarrow E_z = \text{const} = 0; \frac{\partial H_z}{\partial t} = 0; \Rightarrow H_z = 0$$

Примем $E_y = 0$, тогда $-\frac{\partial H_x}{\partial z} = 0$, т.е. $H_x = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{E} \perp \vec{H}}$

$$\begin{cases} -\frac{\partial H_y}{\partial z} = \epsilon_a \frac{\partial E_x}{\partial t} ; \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} = -\mu_a \frac{\partial H_y}{\partial t} ; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial^2 H_y}{\partial z \partial t} = -\epsilon_a \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} ; \\ \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = -\mu_a \frac{\partial^2 H_y}{\partial z \partial t} ; \end{cases} \Rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = \mu_a \epsilon_a \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2}}$$

Решение : $E_x = f_n(z - vt) + f_o(z + vt) ;$

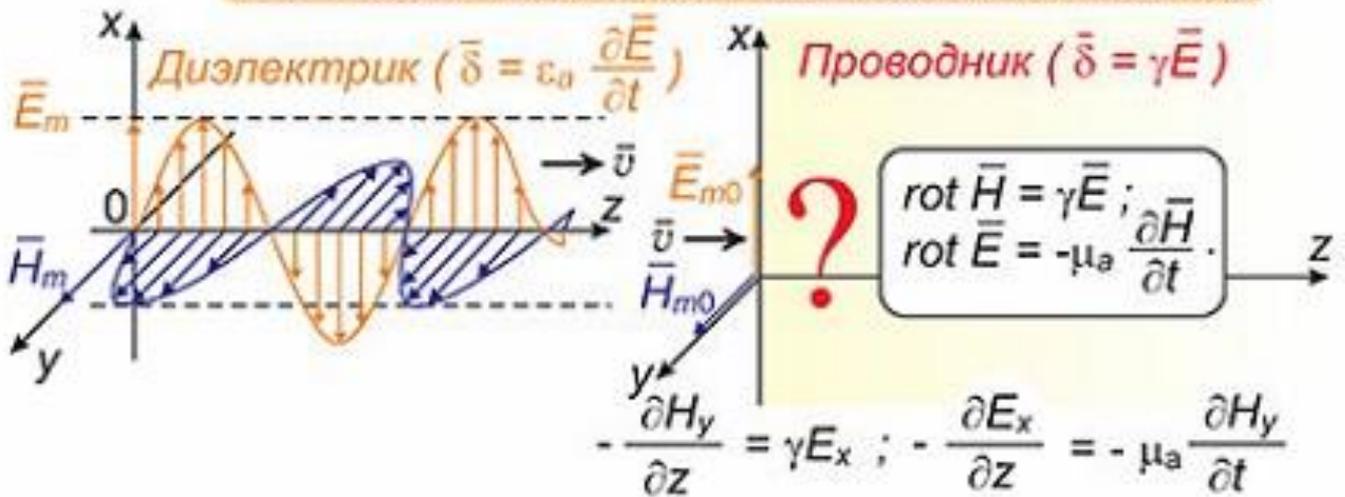
$$H_x = \sqrt{\frac{\epsilon_a}{\mu_a}} [f_n(z - vt) + f_o(z + vt)] ,$$

где $v = \frac{1}{\sqrt{\mu_a \epsilon_a}}$ - скорость распространения волны ;

$z_0 = \sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a}}$ - волновое сопротивление среды .

В пустоте : $v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = 2,998 \cdot 10^8 \frac{\text{м}}{\text{с}} ; z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 377 \text{ Ом} .$

13.9 Плоская электромагнитная волна в проводнике



Если $E_x = E_m \sin(\omega t + \psi_E)$ и $H_y = H_m \sin(\omega t + \psi_H)$,

то: $\dot{E}_x = E_m e^{j\psi_E} = \dot{E}_m$; $\dot{H}_y = H_m e^{j\psi_H} = \dot{H}_m$;

$$-\frac{\partial \dot{H}_m}{\partial z} = \gamma \dot{E}_m (*) ; \quad \frac{\partial \dot{E}_m}{\partial z} = -\gamma \omega \mu_a \dot{H}_m \Rightarrow \frac{d^2 \dot{H}_m}{dz^2} = j\omega \mu_a \gamma \dot{H}_m$$

Общее решение: $\dot{H}_m = A_1 e^{-\alpha z} + A_2 e^{+\alpha z}$,

где $\alpha = \sqrt{j\omega \mu_a \gamma} = e^{j45^\circ} \sqrt{\omega \mu_a \gamma} = (1+j) \sqrt{\frac{\omega \mu_a \gamma}{2}} = (1+j)k$.

$A_2 = 0$ (иначе при $z \rightarrow \infty H_m \rightarrow \infty$); При $z = 0 \dot{H}_m = \dot{H}_{m0}$.

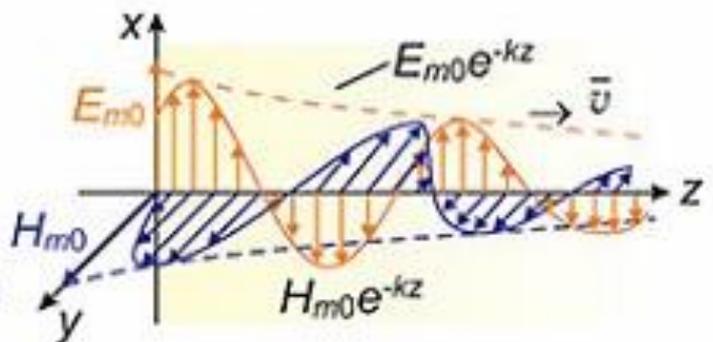
Тогда $\dot{H}_m(z) = H_{m0} e^{-(1+j)kz} \Rightarrow H_y = H_{m0} e^{-kz} \sin(\omega t + \psi_{H0} - kz)$

Из (*): $\dot{E}_m(z) = z_b \dot{H}_m(z)$, $\Rightarrow E_x = \sqrt{\frac{\omega \mu}{2\gamma}} H_{m0} e^{-kz} \sin(\omega t + \psi_{H0} + 45^\circ - kz)$

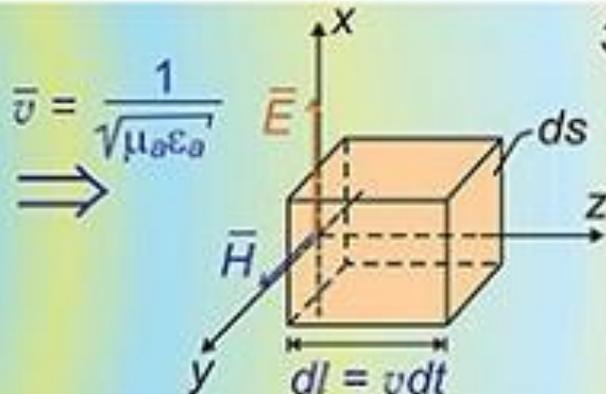
где $z_b = \frac{(1+j)k}{\gamma} =$

$$= \sqrt{\frac{\omega \mu}{2\gamma}} (1+j) = \sqrt{\frac{\omega \mu}{2\gamma}} e^{j45^\circ}$$

- волновое сопротивление



13.10 Вектор Пойтинга



Энергия в единице объема:

$$W' = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{\mu_0 H^2}{2};$$

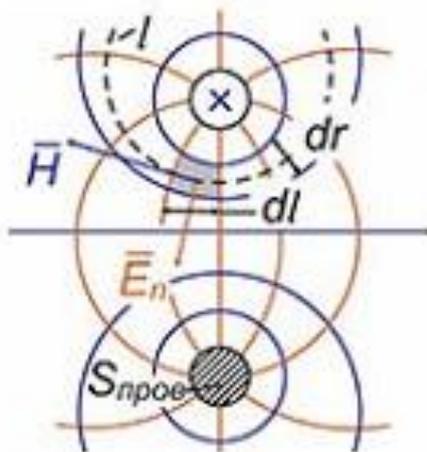
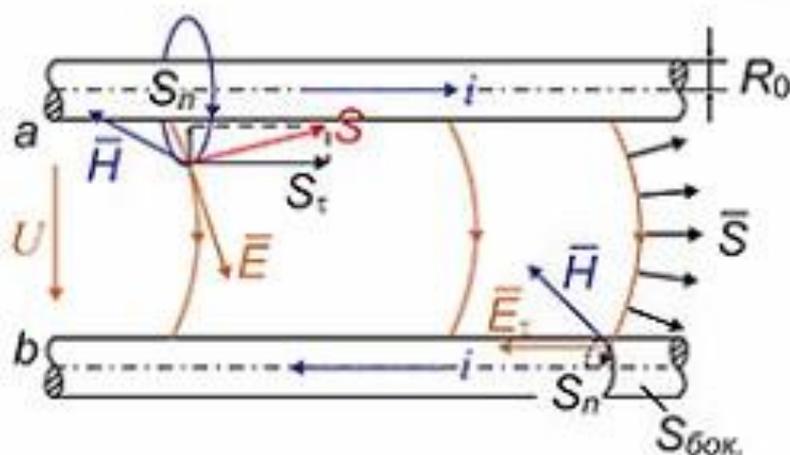
$$E = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} H \quad \text{и} \quad H = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E.$$

$$W' = \sqrt{\mu_0 \epsilon_0} EH = \frac{EH}{v}.$$

В объёме $ds \cdot dl$: $W = \frac{EH}{v} ds v dt = EH ds dt.$

Мощность потока

$$S_n = E_n H_t \quad \bar{S} = [\bar{E} \bar{H}]$$



Мощность потока энергии вдоль линии :

$$dp_t = S_t dl dr = E_n H dl dr = du \cdot di$$

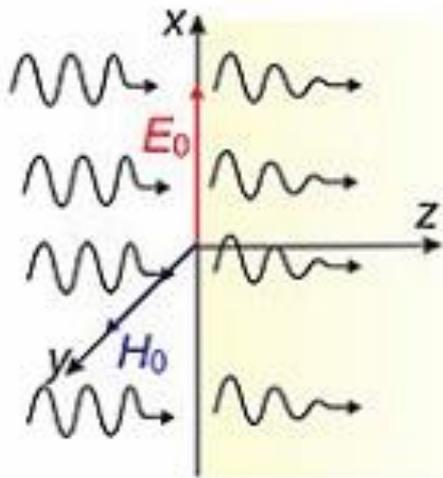
$$p_t = \int_a^b du \int_i di = ui$$

Мощность потока энергии внутрь провода :

$$E_t = \frac{\delta}{\gamma} ; H = \frac{i}{2\pi R_0} ; S_n = E_t H = \frac{\delta i}{2\pi R_0 \gamma} ;$$

$$P_n = \int \frac{\delta i}{2\pi R_0 \gamma} ds = \frac{\delta i 2\pi R_0 l}{2\pi R_0 \gamma} = \frac{i i l}{S_{\text{пров}} \gamma} = i^2 R$$

13.11 Поверхностный эффект и эффект близости



$$\begin{cases} H_m = H_0 e^{-kz} ; \\ E_m = E_0 e^{-kz} ; \end{cases} \quad K = \sqrt{\frac{\omega \gamma \mu_0}{2}}$$

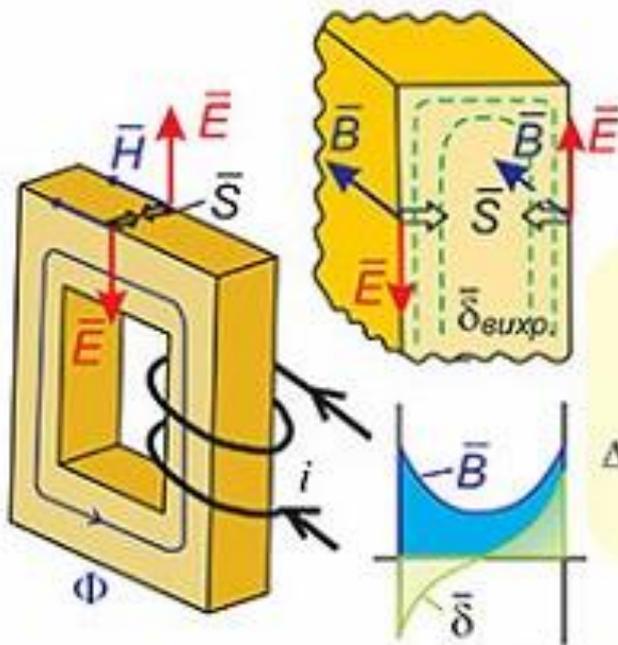
Глубина проникновения
электромагнитной волны :

$$\Delta = \frac{1}{k} : \text{ При } z = \Delta : \begin{cases} H_m = H_0 e^{-1} ; \\ E_m = E_0 e^{-1} ; \end{cases}$$

$$\text{Длина волны : } \lambda = 2\pi\Delta$$

Почти полное затухание при

$$z = (3 \dots 4)\Delta = (0,3 \dots 0,5)\lambda$$



При $f =$

50Гц 50кГц

медь

9мм

0,28мм

алюминий

13мм

0,41мм

эл.тех.сталь

0,7мм

0,022мм

морская вода

71м

2,25м

